Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnele

Licence 2 (Licence à programme national)

Analyse complexe

Série de TD N°1

Exercice 1:
Expliquer pourquoi il est impossible de définir sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre compatible avec les opérations algèbriques.

Exercice 2: Déterminer $Re(1+i)^{2k+1}$ et $Im = (1+i)^{2k+1}$.

Exercice 3: Montrer que les racines non réelles d'une équation polynomiale à coefficients réels se présentent par paires de nombres complexes conjugués.

Exercice 4: Si $Im(z) > 0$, montrer que $Im\left(\frac{z}{1+z^2}\right) > 0$ si et seulement si $|z| < 1$.

Exercice 5: Montrer que les nombres z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si

$$Im\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = 0.$$

Exercice 6: Résoudre les équations $(z-1)^3 - 1 = 0, z^4 + 2 = 0 et z^5 - 1 = i$.

Exercice 7: Résoudre l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$.
Exercice 8: Montrer que le nombre $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ est algèbrique, c'est-à-dire satisfait une équation polynomiale à coefficients entiers.

Exercice 9: Soient w_n la racine primitive enième de l'unité et $k \in \mathbb{N}$. Calculer

$$1 + w_n^k + w_n^{2k} + \cdots + w_n^{(n-1)k};$$

et

$$1 - w_n^k + w_n^{2k} + \cdots + (-1)^{n-1} w_n^{(n-1)k}.$$

Exercice 10: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ni^n}{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

Exercice 11: Déterminer les valeurs de z pour lesquelles la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}$ converge et, pour ces valeurs, calculer sa somme.