Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnele

Lience 2 (Licence à programme national)

Analyse complexe

Série de TD N°1

Exercice 1:
Expliquer pourquoi il est impossible de définir sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre compatible avec les opérations algèbriques.
Solution : Dans un corps ordonné, tout carré est positif et $-1 < 0$. Ici $i^2 = -1$.
Exercice 2: Déterminer $Re(1+i)^{2k+1}$ et $Im = (1+i)^{2k+1}$.
Solution : En utilisant le théorème du binôme, on a :

$$(1+i)^{2k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j}(-1)^j + i \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1}(-1)^j.$$

On en déduit, en utilisant la formule de de Moivre, que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j}(-1)^j = \cos(2k+1)\frac{\pi}{4}$$

et que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1}(-1)^j = \sin(2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3: Montrer que les racines non réelles d'une équation polynomiale à coefficients réels se présentent par paires de nombres complexes conjugués.
Solution : On a pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ et } \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Ainsi si :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0;$$

alors on aura aussi :

$$a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \ldots + a_n \overline{z}^n = 0;$$

Exercice 4: Si $Im(z) > 0$, montrer que $Im(\frac{z}{1+z^2}) > 0$ si et seulement si $|z| < 1$.
Solution : Posant $z = x + iy$ avec $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} Im(\frac{z}{1+z^2}) &= Im\frac{(x+iy)(1+x^2-y^2-i2xy)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}; \\ &= \frac{-2x^2y+y+x^2y-y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} > 0 \end{aligned}$$

si et seulement si

$$y(1-x^2-y^2) > 0 \Leftrightarrow (1-|z|) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

Exercice 5: Montrer que les nombres z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si

$$Im(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = 0.$$

Solution :
Le point z_1 est sur la droite passant par z_2 et $z_3 \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = tz_2 + (1-t)z_3$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} Im(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = s \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_1 = sz_2 + (1-s)z_3. \end{aligned}$$

Donc Le point z_1 est sur la droite passant par z_2 et z_3 cer qui est équivalant à :

$$Im(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = 0.$$

Exercice 6: Résoudre les équations $(z-1)^3 - 1 = 0, z^4 + 2 = 0 et z^5 - 1 = i.$
Solution :
Directement de la formule pour la racine cubique d'un nombre complexe :

- Les trois solutions de l'équation $(z-1)^3 - 1 = 0$ sont :

$$1 + cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3}; \quad 1 + cos\frac{4\pi}{3} + i\ sin\frac{4\pi}{3}; \quad 2.$$

- Les trois solutions de l'équation $z^4 + 2 = 0$,sont :

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{2}(cos\frac{3\pi}{4} + i\ sin\frac{3\pi}{4}); \qquad &\sqrt[4]{2}(cos\frac{5\pi}{4} + i\ sin\frac{5\pi}{4}); \\ &\sqrt[4]{2}(cos\frac{7\pi}{4} + i\ sin\frac{7\pi}{4}); \qquad &\sqrt[4]{2}(cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

- Les trois solutions de l'équation $z^5 - 1 = i$, sont :

$$\begin{aligned} &\sqrt[5]{2}(cos\frac{\pi}{20} + i\ sin\frac{\pi}{20}); \qquad &\sqrt[5]{2}(cos\frac{3\pi}{20} + i\ sin\frac{3\pi}{20}); \\ &\sqrt[5]{2}(cos\frac{5\pi}{20} + i\ sin\frac{5\pi}{20}); \qquad &\sqrt[5]{2}(cos\frac{7\pi}{4} + i\ sin\frac{7\pi}{4}); \\ &\sqrt[5]{2}(cos\frac{9\pi}{4} + i\ sin\frac{9\pi}{4}). \end{aligned}$$

Exercice 7: Résoudre l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$. **Solution :**
Si $(1+z)/(1-z) = w$, alors $z = (w-1)/(w+1)$. Les racines de $w^5 = 1$ étant les nombres $1; w_5; w_5^2; w_5^3; w_5^4$, celles de l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$ sont :

$$0; (w_5 - 1)/(w_5 + 1); \ \ (w_5^2 - 1)/(w_5^2 + 1); \ \ (w_5^3 - 1)/(w_5^3 + 1); \ \ (w_5^4 - 1)/(w_5^4 + 1).$$

Exercice 8: Montrer que le nombre $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ est algèbrique, c'est-à-dire satisfait une équation polynomiale à coefficients entiers.
Solution :
On a d'abord $(z+2i)^3 = 4$, soit $z^3 - 12^z - 4 = i(8 - 6z^2)$.
puis, élevant au carré, on btient l'équation :

$$z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0.$$

Exercice 9: Soient w_n la racine primitive enième de l'unité et $k \in \mathbb{N}$. Calculer

$$1 + w_n^k + w_n^{2k} + \cdots + w_n^{(n-1)k};$$

et

$$1 - w_n^k + w_n^{2k} + \cdots + (-1)^{n-1} w_n^{(n-1)k}.$$

Solution :
Si $z \neq 1$, alors :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z};$$

en faisant $z = w_n^k$, on aura :

$$1 + w_n^k + w_n^{2k} + \cdots + w_n^{(n-1)k} = \frac{1 + (-1)^n}{1 - w_n^k}.$$

Exercice 10: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ni^n}{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^n.$$

Solution :
La première limite n'existe pas : les valeurs adhérentes de cette suite sont en effet les nombres $-1; -i; 1; i$.
La deuxième limite est 0 puisque $|\frac{i+1}{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Exercice 11: Déterminer les valeurs de z pour lesquelles la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}$ converge et, pour ces valeurs, calculer sa somme.
Solution :
Il s'agit d'une série géométrique de raison $1 = (1 + z^2)$. Elle converge si et seulement si $|1 + z^2| > 1$ c'est-à-dire à l'extérieur du lemniscate $\{|1 + iz||1 - iz| = 1\}$, où sa somme est égale à $1 + \frac{1}{z^2}$. (Remarque : Une lemniscate est une courbe plane ayant la forme d'un 8)