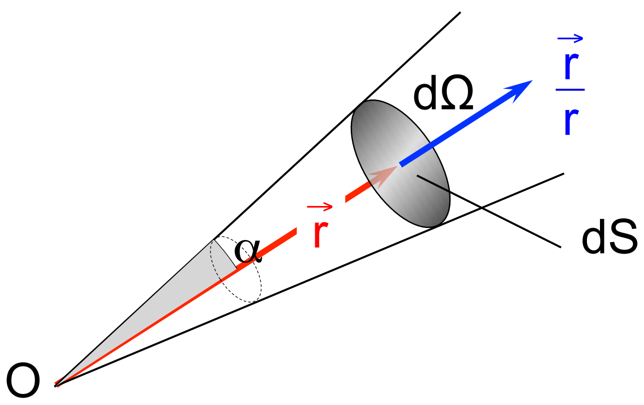
2 THEOREME DE GAUSS

2.1 Notion d'angle solide

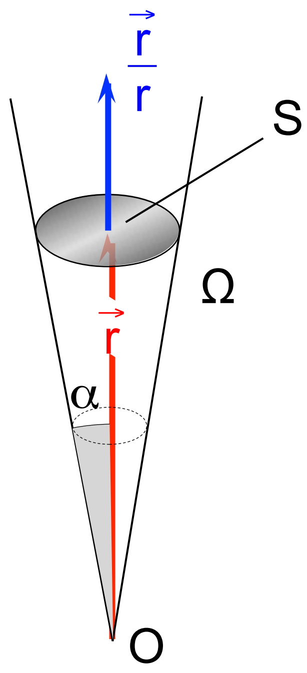
Extension tridimensionnelle de la notion d'angle définie dans le plan.

L'angle solide *d*Ω, délimité par un cône de demi-angle α coupant un élément de surface élémentaire *dS* situé à une distance *r* de son sommet O, vaut :



$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

• dΩ : - est toujours positif
- est indépendant de *r* puisque $dS \propto r^2$
- s'exprime en stéradian (sr)



• Calcul d'un angle solide Ω d'ouverture α :

En coordonnées sphériques, l'élément de surface perpendiculaire à $\vec{e}_r$ est :

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

On en déduit l'expression de dΩ :

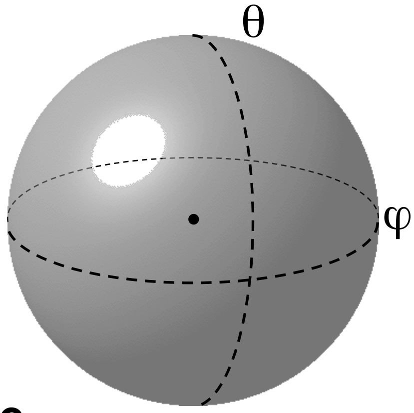
$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

L'angle solide Ω d'ouverture est défini par :

$\varphi : 0 \rightarrow 2\pi$ et $\theta : 0 \rightarrow \alpha$

D'où l'expression de Ω :

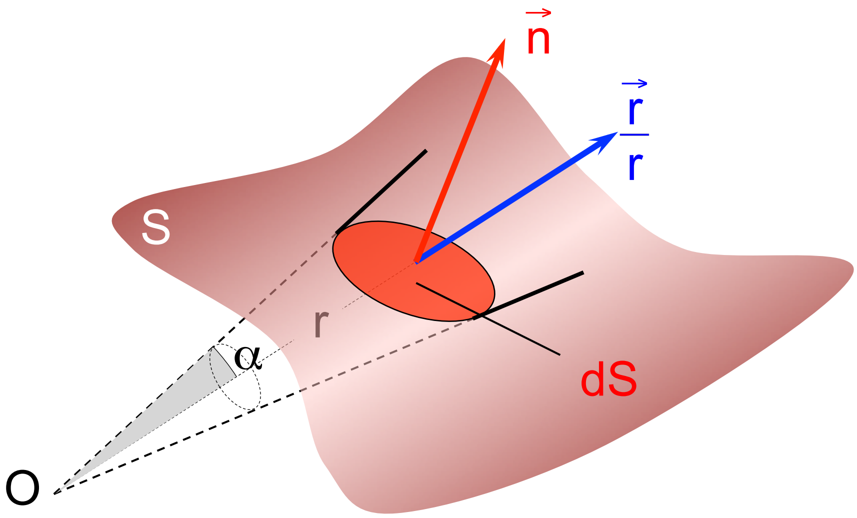
$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi\,(1 - \cos\alpha)$$



Remarque : pour tout l'espace, $\theta : 0 \rightarrow \pi$ donc dans ce cas : $\Omega = 4\pi$.

• **Surface interceptée par un angle solide**

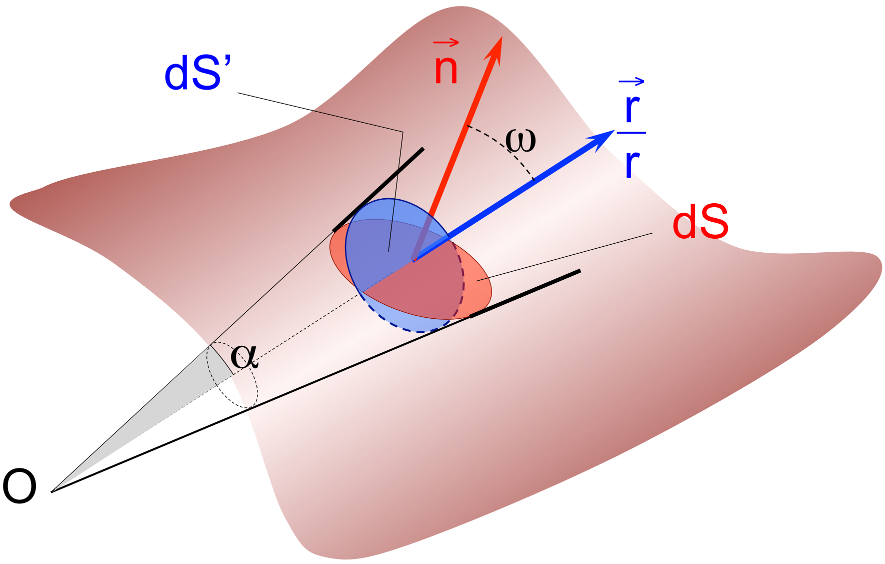
On considère une surface quelconque S et un angle solide interceptant cette surface :



La surface interceptée correspond à l'élément de surface dS. Cette surface élémentaire a pour normale $\vec{n}$.

On cherche à connaître le lien entre la surface interceptée par l'angle solide et la valeur de cet angle solide.

On construit dS', élément de surface perpendiculaire à $\vec{r}/r$

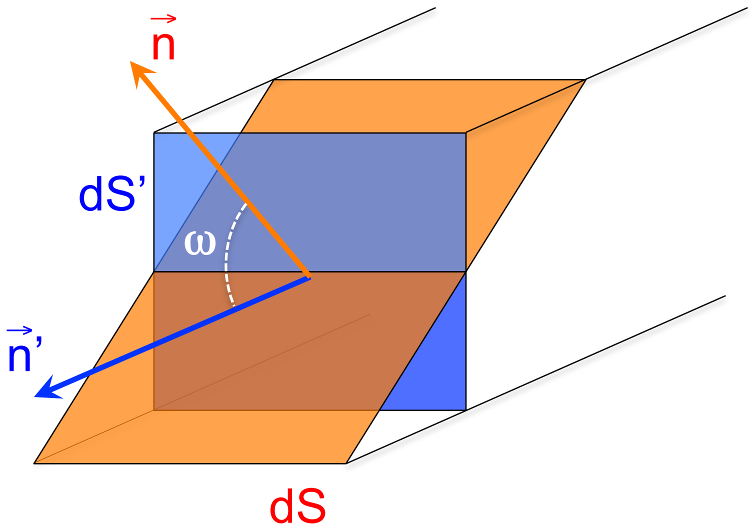


• l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{r}/r$ est ω.

• l'angle solide vaut : $\quad d\Omega = \dfrac{dS'}{r^2}$ $\quad$ avec $dS' = dS\cdot\cos\omega$.

d'où finalement : $\quad d\Omega = \dfrac{dS}{r^2}\cdot\cos\omega$

On redémontre aisément que $dS' = dS\cdot\cos\omega$ en considérant des surfaces élémentaires de forme rectangulaire :

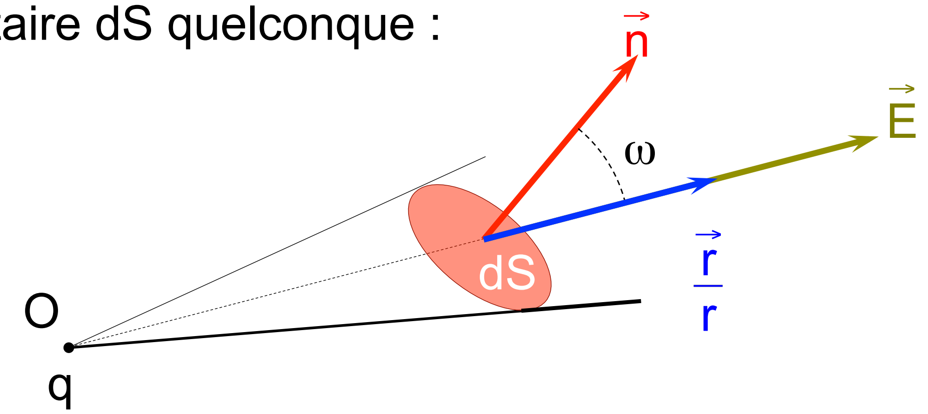


2.2 Théorème de Gauss

2.2.1 Notion de Flux

Flux du champ électrique à travers une surface quelconque

On considère une charge ponctuelle q en O et une surface élémentaire dS quelconque :



Le flux élémentaire $d\phi$ de $\vec{E}$ à travers la surface *dS* est défini par la relation :

$$d\phi = \vec{E}.\vec{dS} = \vec{E}.\vec{n}\, dS$$

avec $$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

donc $$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}$$

soit $$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{r^2}\cos\omega$$

d'où finalement : $$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

<u>Conséquences</u> :

- Le flux de $\vec{E}$ ne dépend que de l'angle solide sous lequel est vue la surface,

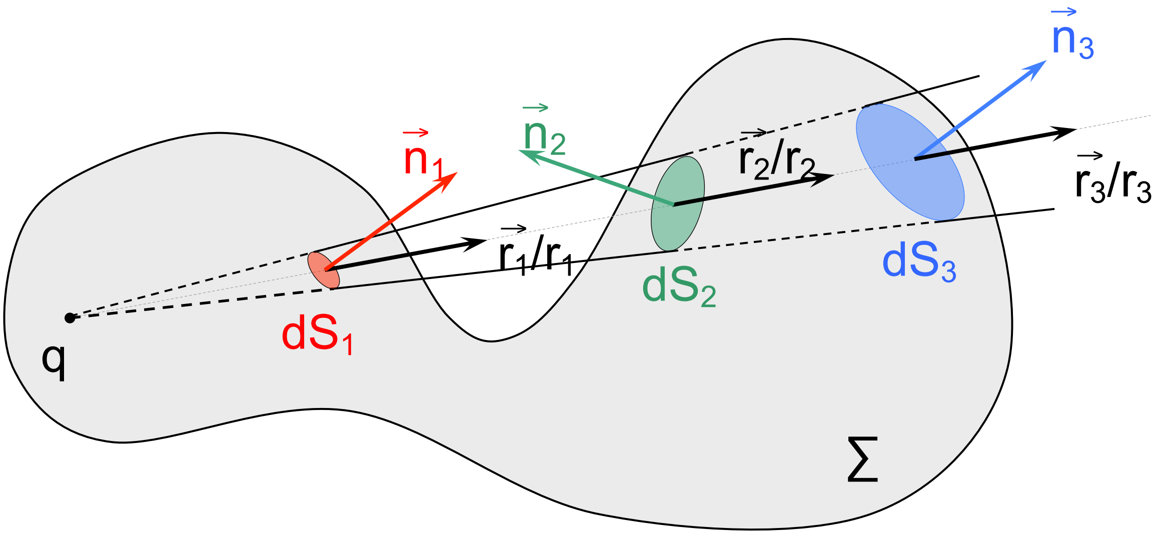
- Le flux de $\vec{E}$ est indépendant de la distance surface – source : dS augmente en r^2 mais de $\vec{E}$ diminue en $1/r^2$.

2.2.2 Flux total du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque fermée

On considère une charge ponctuelle *q* **<u>à l'intérieur</u>** d'une surface fermée ∑.

On cherche à calculer le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface ∑ vue sous l'angle solide dΩ.

L'angle solide en question intercepte la surface fermée ∑ en définissant 3 surfaces élémentaires dS_1, dS_2 et dS_3 ayant pour normales respectives $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ (normales sortantes).



Dans ce cas, le flux de $\vec{E}$ est la somme d'un nombre impair (3) de flux élémentaires :

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}_1).\vec{dS}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2).\vec{dS}_2 + \vec{E}(\vec{r}_3).\vec{dS}_3$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{dS_1}{r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1}\cdot\vec{n}_1 + \frac{dS_2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\cdot\vec{n}_2 + \frac{dS_3}{r_3^2}\frac{\vec{r}_3}{r_3}\cdot\vec{n}_3\right]$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[d\Omega - d\Omega + d\Omega] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ d\Omega$$

Le flux total de $\vec{E}$ à travers $\sum$ et dans toutes les directions s'obtient en intégrant l'expression précédente sur les 4π stéradian :

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

En vertu du théorème de superposition, ce résultat se généralise à un ensemble de *n* charges.

Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée $\sum$ est égal, dans le vide, à la charge électrique Q_{int} contenue dans le volume défini par la surface divisée par ε_0.

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

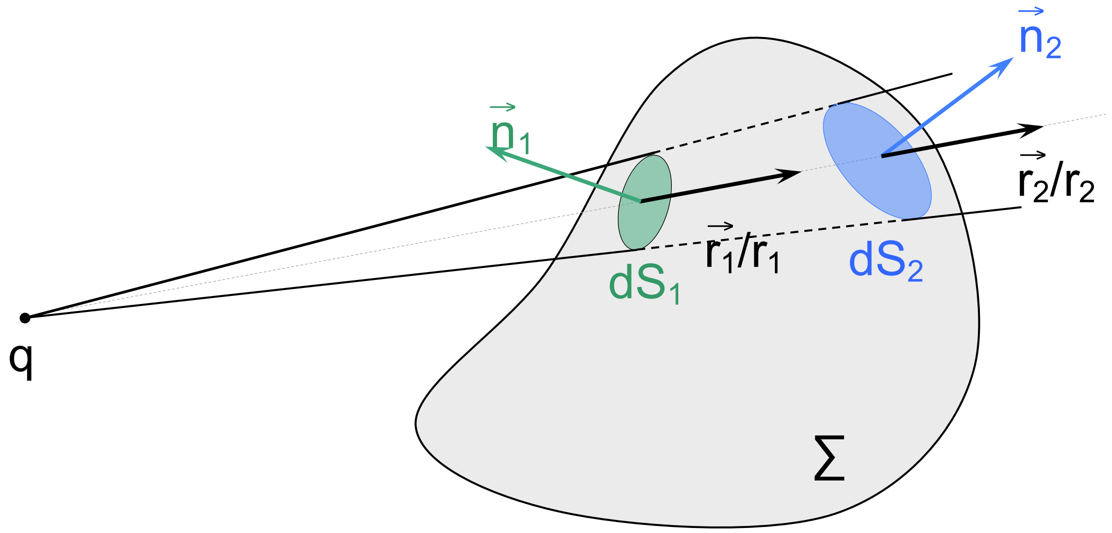
où Q_{int} représente la charge totale contenue dans V :

$$Q_{int} = \sum_{i=1}^{N} q_i \qquad \text{ou} \qquad Q_{int} = \iiint_V \rho(\vec{r})\ dv$$

Remarques :

• <u>Cas particulier où la charge est à l'extérieur de</u> Σ.

Dans ce cas, le flux de $\vec{E}$ à travers Σ vue sous l'angle solide $d\Omega$ est la somme d'un nombre **pair** de flux élémentaires :



$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}_1).\vec{dS}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2).\vec{dS}_2$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{dS_1}{r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_2}\cdot\vec{n}_1 + \frac{dS_2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\cdot\vec{n}_2\right]$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[-d\Omega + d\Omega]$$

$$d\phi = 0$$

• Le théorème de Gauss fait le lien entre le flux du champ électrique $\vec{E}$ et les sources de champ : il ne peut y avoir de flux du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée Σ que si la somme des charges contenues dans le volume défini par ∑ est non nulle.

• Le théorème de Gauss constitue une des quatre équations de Maxwell (cf. chapitre Relations Locales)

2.3 Exemples d'application du théorème de Gauss

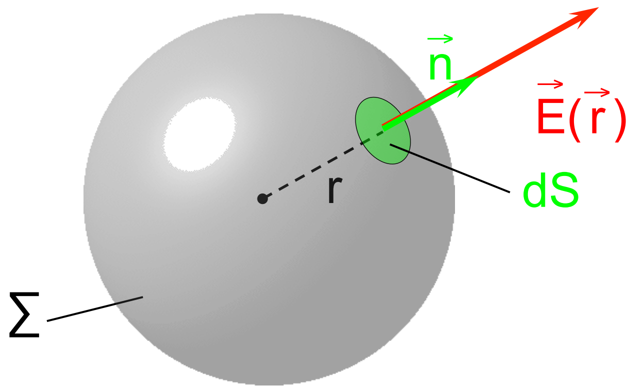
- Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières.
- Il convient évidemment d'utiliser une surface de Gauss ∑ possédant les mêmes propriétés de symétrie que le champ et/ou la distribution de charges.

2.3.1 Charge ponctuelle

On va (re)calculer l'expression du champ rayonné par une charge ponctuelle.

On considère une charge ponctuelle *q* placée en O.
Le problème a une symétrie sphérique ; on sait par ailleurs que le champ $\vec{E}$ est radial : $\vec{E}(\vec{r}) = E(r).\, \vec{e}_r$

La surface de Gauss à considérer est une sphère centrée sur O et de rayon *r*.



En chaque point M de ∑ :

- le champ est perpendiculaire à ∑, $\vec{E} \,//\, \vec{n}$
- le champ a même norme E(r)

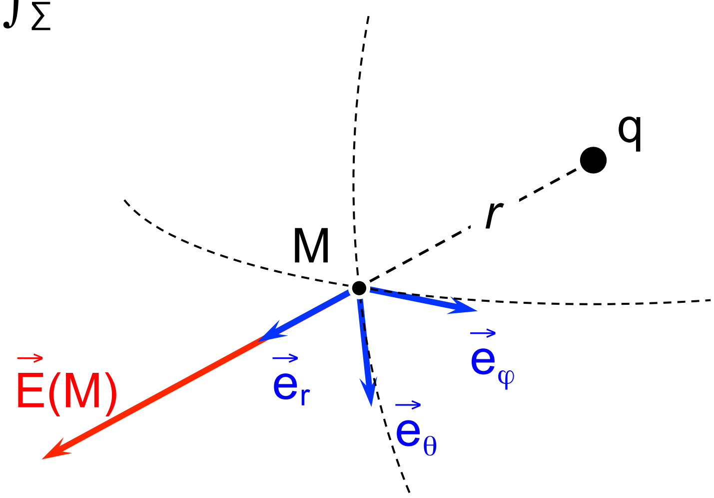
Le théorème de Gauss implique :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

avec $$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = 4\pi r^2\, E(r)$$

et $$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

d'où : $$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$



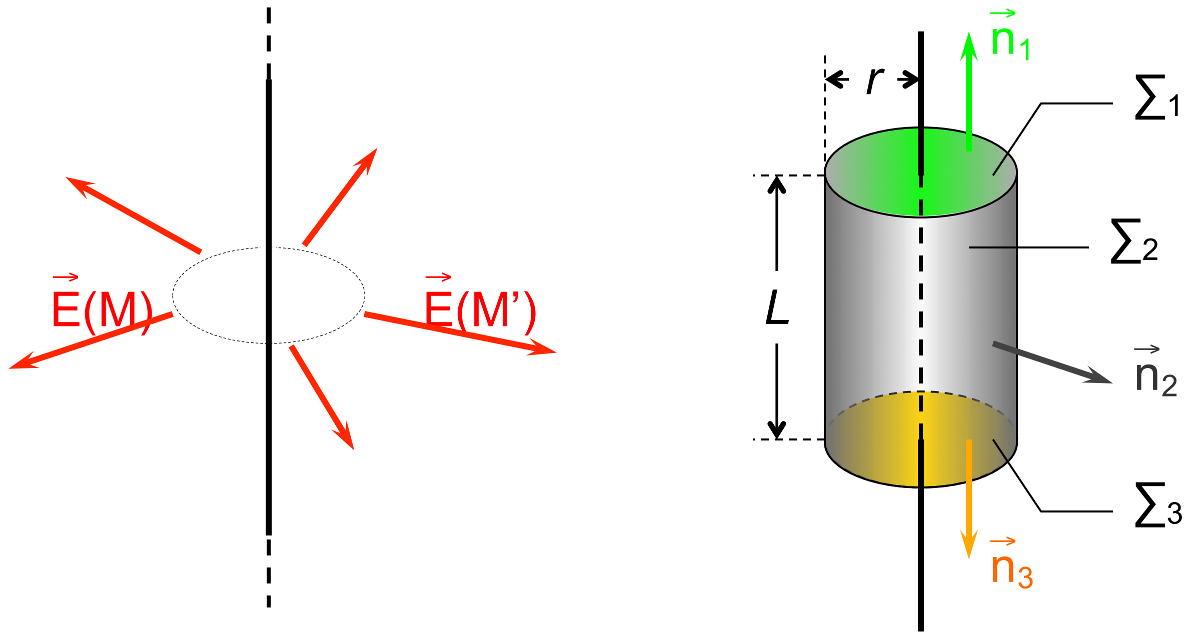
sous forme vectorielle :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r).\,\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

2.3.2 Distribution linéique rectiligne

On considère un fil rectiligne infini chargé avec la densité linéique λ.

Le problème a une symétrie cylindrique; on sait (§. 1.9.3.2) que le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au fil : $\vec{E}(\vec{r}) = E(r).\,\vec{e}_r$



La surface de Gauss $\sum$ à considérer doit avoir les symétries du problème. On choisit donc un cylindre fermé (de rayon *r* et de longueur *L*) constitué des 3 surfaces $\sum_1$, $\sum_2$ et $\sum_3$.

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Calculons le premier membre de l'égalité :

$$\phi = \underbrace{\iint_{\Sigma 1} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_1}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \vec{E}(\vec{r}) \perp \vec{dS}_1}} + \iint_{\Sigma 2} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_2 + \underbrace{\iint_{\Sigma 3} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_3}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \vec{E}(\vec{r}) \perp \vec{dS}_3}}$$

En chaque point M de $\sum_2$:

- le champ est perpendiculaire à $\sum_2$, $\vec{E} \,//\, \vec{n}_2$
- le champ a même norme E(r)

Donc, on arrive à :

$$\phi = \iint_{\Sigma 2} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_2 = E(r) \iint_{\Sigma 2} dS = 2\pi r\, L\, E(r)$$

Par ailleurs, le second membre de l'égalité est déduit de la charge totale contenue dans le cylindre défini par $\sum$:

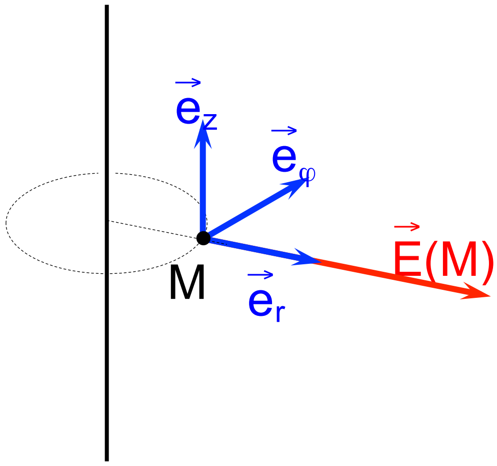
$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\, L}{\varepsilon_0}$$

d'où l'expression de la norme du champ rayonné par un fil infini :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}$$

Ou sous forme vectorielle :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}\frac{\vec{r}}{r} = = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}\vec{e}_r$$



On en déduit l'expression du potentiel à partir de la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

avec $$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

Dans le cas présent, $\vec{E}(r)$ n'a de composantes que selon $\vec{e}_r$, cela signifie que le potentiel ne dépend pas de φ et de z.

Le gradient de V se résume donc à :

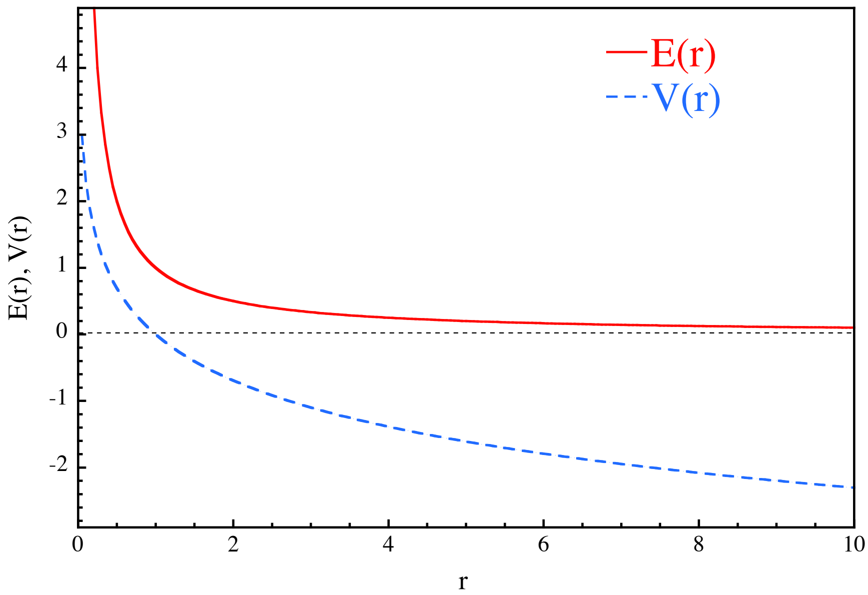
$$\overrightarrow{\text{grad}\ V} = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r$$

d'où l'expression du champ électrostatique :

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

et du potentiel :

$$V(r) = -\int E(r)\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot \ln r + C^{te}$$



2.3.3 Distribution surfacique

On considère un plan infini chargé avec la densité surfacique σ.

Analyse des symétries

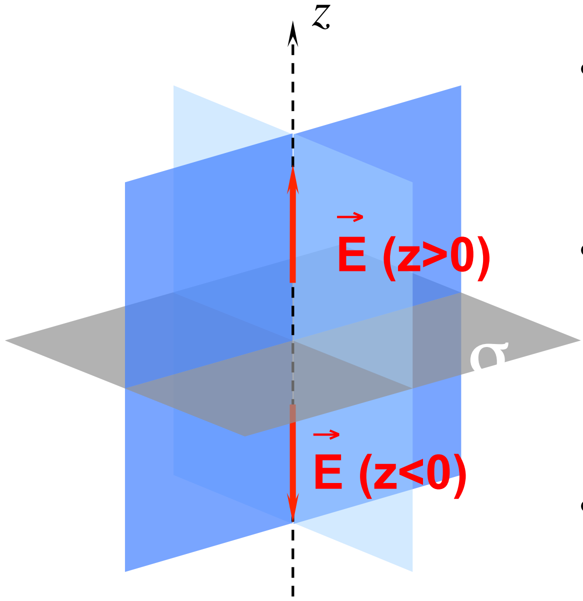
La distribution de charge est invariante par translation de tout vecteur parallèle au plan.

La distribution est invariante par symétrie miroir selon le plan contenant les charges.

La distribution est invariante par symétrie miroir selon tout plan perpendiculaire au plan contenant les charges.

La distribution est invariante par rotation autour de tout axe perpendiculaire au plan.

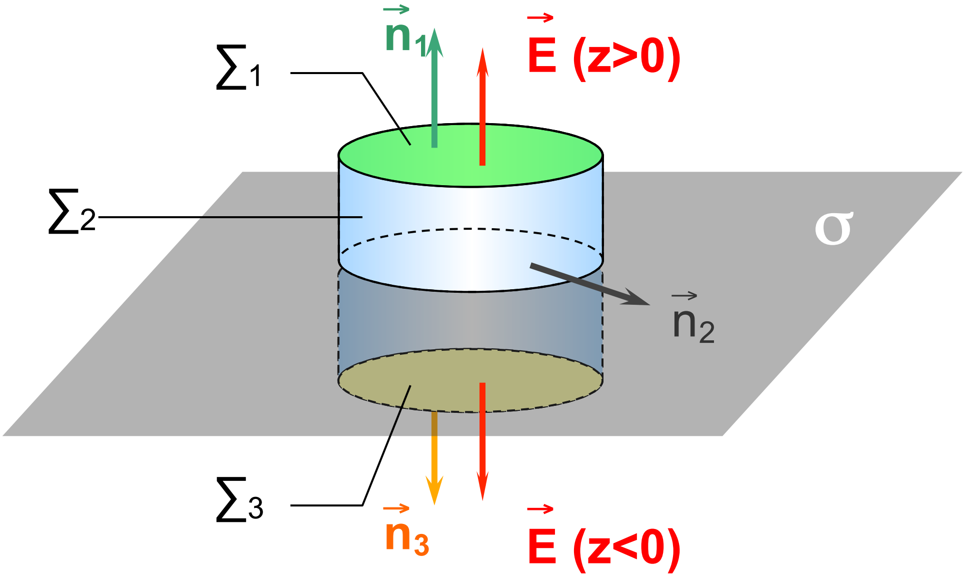
$\Rightarrow$ Le problème a une symétrie cylindrique



- Le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan chargé
- $\vec{E}$ est dirigé vers le haut pour le demi-espace z>0 et dirigé vers le bas pour le demi-espace z<0.
- $\vec{E}(r,\varphi,z) = E(z)\,\vec{e}_z$
- $\vec{E}(z) = -\,\vec{E}(-z)$

Choix de la surface de Gauss :

On choisit un cylindre de rayon *r* perpendiculaire au plan constitué des 3 surfaces Σ_1, Σ_2 et Σ_3.



$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Calculons le premier membre de l'égalité :

$$\phi = \iint_{\Sigma 1} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_1 + \underbrace{\iint_{\Sigma 2} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_2}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ \vec{E}(\vec{r}) \perp \vec{dS}_2}} + \iint_{\Sigma 3} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_3$$

En chaque point M de Σ_1 et Σ_3 :

- le champ est perpendiculaire à Σ_1 et Σ_3,
- $\vec{E}(z>0)$ // $\vec{n}_1$ et dans le même sens,
- $\vec{E}(z<0)$ // $\vec{n}_3$ et dans le même sens,
- le champ a même norme E(z).

Le flux de $\vec{E}$ à travers Σ vaut donc :

$$\phi = E(z)\,\pi r^2 + 0 + E(z)\,\pi r^2 = E(z) \cdot 2\,\pi r^2$$

Par ailleurs, le second membre de l'égalité est déduit de la charge totale contenue dans le cylindre :

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,\pi r^2}{\varepsilon_0}$$

d'où l'expression de la norme du champ :

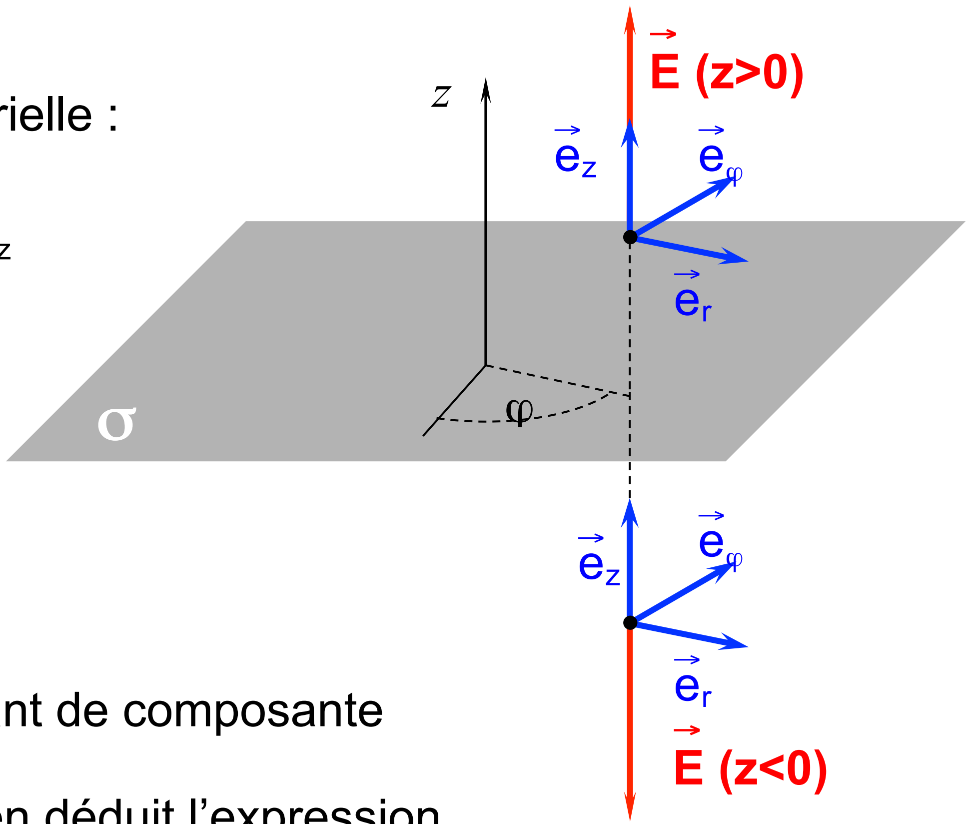
$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Celle-ci est constante mais il faut tenir compte du fait que $\vec{E}$ change de sens quand z change de signe, d'où :

$$E(\vec{r}) = E(r,\varphi,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}$$

Sous forme vectorielle :

$$\vec{E}(r,\varphi,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z$$

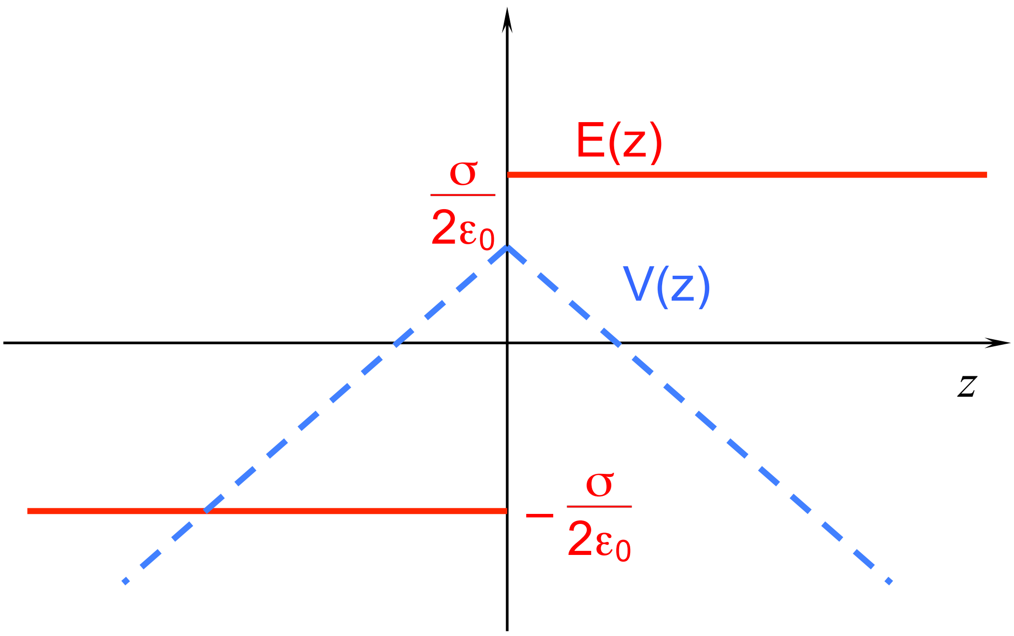


Le champ $\vec{E}$ n'ayant de composante que selon $\vec{e}_z$, on en déduit l'expression du potentiel :

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \Rightarrow \quad V(z) = -\int E(z)\,dz$$

avec : $z < 0$ $\quad E(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V(z) = +\dfrac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0} + C^{te}$

$z < 0$ $\quad E(z) = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V(z) = -\dfrac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0} + C^{te}$



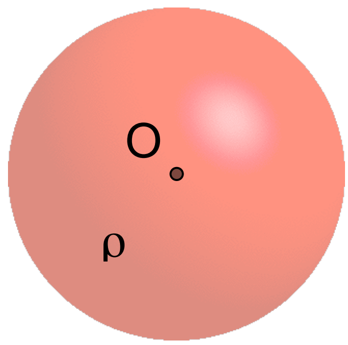
Remarques :

- il y a une discontinuité de la compsante normale du champ électrique $\vec{E}$ au niveau de la surface ($\Delta E = \sigma/\varepsilon 0$)

- Le choix délibéré d'utiliser r au lieu de ρ en coordonnées cylindriques est justifié pour éviter la confusion avec la densité de charge $\rho(\vec{r})$.

2.3.4 Distribution volumique à symétrie sphérique

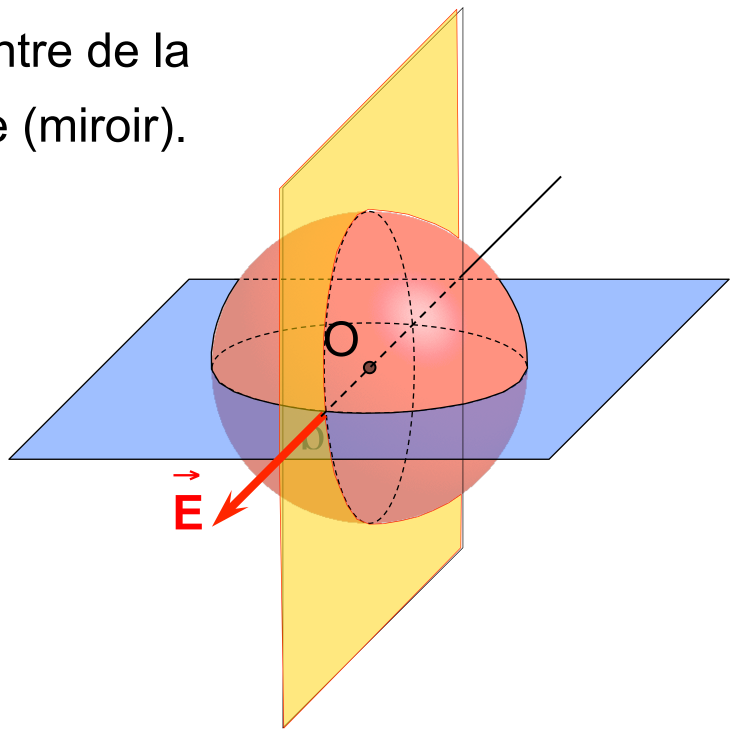
On considère une sphère de rayon R chargée avec la densité volumique ρ uniforme.



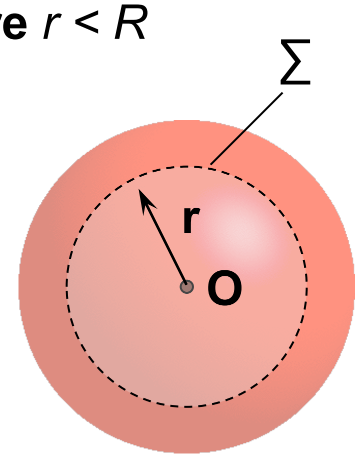
- La distribution est invariante par rotation autour du centre.
- Tout plan passant par le centre de la sphère est plan de symétrie (miroir).

- La distribution présente une symétrie sphérique.
- Le champ $\vec{E}$ est parallèle à l'intersection des miroirs
- Le champ $\vec{E}$ est radial

$\rightarrow$ coordonnées sphériques



Calcul du champ à l'intérieur de la sphère $r < R$



- La surface de Gauss est une surface sphérique de rayon r et centrée sur O
- En chaque point de la surface ∑, le champ $\vec{E}(r)$ est perpendiculaire

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le premier terme s'écrit :

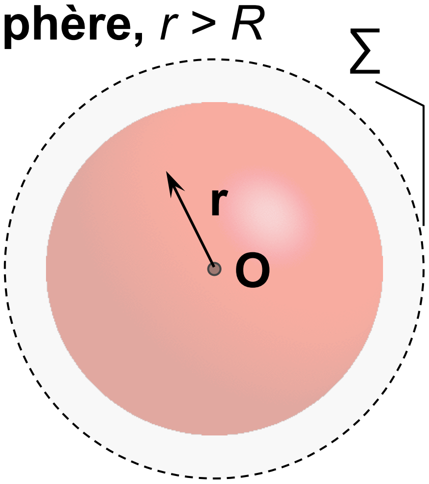
$$\oiint_\Sigma \vec{E}_{int}(\vec{r}).\vec{dS} = E_{int}(\vec{r}) \oiint_\Sigma dS = 4\pi r^2\, E_{int}(r)$$

Le deuxième vaut :

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

d'où $\qquad E_{int}(r) = \dfrac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\, r \qquad$ et $\vec{E}_{int}(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\, \vec{e}_r$

Calcul du champ à l'extérieur de la sphère, $r > R$



- La surface de Gauss est une surface sphérique de rayon r et centrée sur O
- Le premier terme de l'égalité de Gauss s'écrit :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}_{ext}(\vec{r}).\vec{dS} = E_{ext}(\vec{r}) \oiint_\Sigma dS = 4\pi r^2\, E_{ext}(r)$$

Le deuxième vaut :

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, R^3$$

d'où $\qquad E_{ext}(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$

À l'extérieur de la sphère, tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle centrée sur O.

Calcul du potentiel

On utilise la relation $\vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$$V_{ext}(r) = -\int E_{ext}(r)\,dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} + K_1 \quad \text{avec } V_{ext}(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = 0$$

$$V_{int}(r) = -\int E_{int}(r)\,dr = -\frac{\rho\, r^2}{6\varepsilon_0} + K_2$$

La constante K_2 est déduite de la condition de continuité du potentiel qui impose :

$$V_{ext}(R) = V_{int}(R) = \frac{\rho\, R^2}{3\varepsilon_0}$$

Ce qui permet d'en déduire la valeur du potentiel à l'intérieur de la sphère :

$$V_{int}(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6}\right]$$