1 Les Matrices (chapitre 3)

1.1 Généralités sur les matrices

2 Matrice associée à une application linéaire

2.1 Changement de bases

2.1.1 Matrice de passage

2.2 Formule de changement de base

2.3 Matrices semblables

Proposition .1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.*
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Soient B_E, B'_E deux bases de E.
Soient B_F, B'_F deux bases de F.
Soit $P = P_{B_E \to B'_E}$ la matrice de passage de B_E à B'_E.
Soit $Q = P_{B_F \to B'_F}$ la matrice de passage de B_F à B'_F.
Soit $A = Mat\,(f, B_E, B_F)$ la matrice associée à f relativement aux bases B_E et B_F.
Soit $A' = Mat\,(f, B'_E, B'_F)$ la matrice associée à f relativement aux bases B'_E et B'_F.
Alors

$$A' = Q^{-1}.A.P$$

Démonstration.

$$\underbrace{E_{B'_E} \xrightarrow{f} F_{B'_F}}_{A'} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{E_{B'_E} \xrightarrow{Id_E} E_{B_E}}_{P} \underbrace{\xrightarrow{f} F_{B_F}}_{A} \quad \underbrace{\xrightarrow{Id_F} \quad F_{B'_F}}_{Q^{-1}}$$

On a

$$f = id_F \circ f \circ id_E$$

alors

$$\begin{aligned} A' &= Mat\,(f, B'_E, B'_F) = Mat\,(id_F \circ f \circ id_E, B'_E, B'_F) \\ &= Mat\,(id_F, B_F, B'_F)\,.Mat\,(f, B_E, B_F)\,.Mat\,(id_E, B'_E, B_E) \\ A' &= Q^{-1}.A.P \end{aligned}$$

■

Exemple 1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec*
$B_E = (a_1, a_2)$ et $B'_E = (a'_1, a'_2)$ deux bases de E.
$B_F = (e_1, e_2, e_3)$ et $B'_F = (e'_1, e'_2, e'_3)$ deux bases de F.

$$\begin{cases} f(a_1) = e_2 + 2e_3 \\ f(a_2) = e_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a'_1 = a_1 + a_2 \\ a'_2 = a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1' = 2e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 \\ e_3' = e_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = e_3' \\ e_2 = e_2' - e_3' \\ e_3 = \frac{1}{2}e_1' \end{cases}$$

$$Mat\,(f, B_E, B_F) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{B_E \to B_E'} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P_{B_F \to B_F'} = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{B_F' \to B_F} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{E_{B_E'} \xrightarrow{Id_E} E_{B_E}}_{P} \quad \underbrace{\xrightarrow{f} F_{B_F}}_{A} \quad \underbrace{\xrightarrow{Id_F} E_{B_F'}}_{Q^{-1}}$$

$$Mat\,(f, B_E', B_F') = A' = Q^{-1}AP =$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Matrices équivalentes

Définition 1 *Deux matrices A et B de $M_{np}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes si il existe $P \in M_p(\mathbb{K})$ et $Q \in M_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles telles que*

$$B = Q.A.P.$$

Remarque .1 *1) Il s'agit d'une relation d'équivalence.*
2) Deux matrices de même type sont équivalentes si et seulement représentent un même morphisme dans des bases différentes.

2.4 Rang d'une matrice

Définition 2 *Soit* $A \in M_{np}(\mathbb{K})$. *On appelle rang de* A *noté* $rg\,(A)$ *le rang des vecteurs colonnes* $(v_1, v_2, ..., v_p)$ *de* A. *(* $rg\,(A) \leq p$*).*

$$rg\,(A) = \dim \langle (v_1, v_2, ..., v_p) \rangle \,.$$

Proposition .2 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels avec* $\dim E = p$ *et* $\dim F = n$.
Soit $f : E \to F$ *une application linéaire.*
Soient B_1 *une base de* E *et* B_2 *une base de* F.
Soit $A = Mat\,(f, B_1, B_2)$ *la matrice associée à* f *relativement aux bases* B_1 *et* B_2.
Alors

$$rg\,(A) = rg\,(f)$$

Démonstration. on pose $B_1 = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & ... & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ : & : & : & : \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ : \\ . \\ v_n \end{array} \end{array}$$

on a bien

$$rgA = \dim \langle f\,(e_1)\,, f\,(e_2)\,, ..., f\,(e_p) \rangle = \dim \operatorname{Im} f = rgf.$$

■

2.5 Rang et matrice inversible

Proposition .3 *Une matrice carrée de taille* n *est inversible si et seulement si elle est de rang* n.

Démonstration. Soit A une matrice carrée d'ordre n.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A. On a les équivalences suivantes : ■

$$rgA = rgf = n \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \Longleftrightarrow f \text{ bijective} \Longleftrightarrow A \text{ inversible.}$$

Propriétes

1) $A = 0_{M_{n,p}(\mathbb{k})} \Longrightarrow rgA = 0$
2) Deux matrices semblables ont même rang
3) Deux matrices équivalentes ont même rang.