République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. MIRA - Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Cours d'Algèbre 2

Destiné aux étudiants de 1ère année MI

Les Chargés de Cours :

M^{me} **BOURAINE**
M^{me} **MOHDEB**
M^{me} **NASRI**
M^{r} **MOUZAIA**

Année universitaire 2019/2020

Table des matières

1 Les espaces vectoriels **2**
1.1 Espace vectoriel sur un corps commutatif 2
1.1.1 Définitions et propriétés 2
1.1.2 Règles de calcul dans un espace vectoriel 3
1.2 Sous-espaces vectoriels 4
1.2.1 Définitions et exemples 4
1.2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel 6
1.3 Combinaison linéaire (C.L) 6
1.3.1 Famille libre 7
1.3.2 Famille liée 8
1.4 Bases en dimension finie 10
1.5 Somme et Somme directe de deux sous-espaces vectoriels 12

Bibliographie **14**

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel sur un corps commutatif

1.1.1 Définitions et propriétés

Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps commutatif et $\mathbf{E}$ un ensemble quelconque muni de deux lois de composition, une loi interne, notée additivement :

$$\begin{array}{rccc} (+): & \mathbf{E} \times \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

et une loi externe, notée multiplicativement :

$$\begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbb{K} \times \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

Définition 1.1. On dit que $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$** ou un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** ($\mathbb{K}$-e.v) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $(\mathbf{E}, +)$ est un groupe commutatif.
2. La loi externe vérifie les propriétés suivantes : $\forall (x, y) \in \mathbf{E}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$
   a) $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$ (distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne dans $\mathbf{E}$).
   b) $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot y)$ (distributivité de la loi externe par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$.
   c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
   d) $\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \cdot x = x \quad$ où $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ est l'élément unité de $\mathbb{K}$.

Remarque 1.1. Si la loi interne est notée $\star$ et la loi externe est notée Δ, on parlera du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbf{E}, \star, \Delta)$. Les conditions de la loi externe ci-dessus deviennent :
$\forall (x, y) \in \mathbf{E}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

a) $\alpha\Delta(x \star y) = (\alpha\Delta x) \star (\alpha\Delta y)$ (distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne dans $\mathbf{E}$).

b) $(\alpha + \beta)\Delta x = (\alpha\Delta x) + (\beta\Delta y)$ (distributivité de la loi externe par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$).

c) $\alpha\Delta(\beta\Delta x) = (\alpha \cdot \beta)\Delta x$

d) $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}\Delta x = x$ où $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ est l'élément unité de $\mathbb{K}$.

Les éléments de $\mathbf{E}$ sont appelés **vecteurs**.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

Exemple 1.1. *1.* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-e.v. avec :* $\forall (x, y)\ (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
(***A démontrer en exercice****).*

2. Tout corps commutatif est un espace vectoriel sur lui même.

3. $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-e.v.*

4. $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

Exercice 1.1. *Soit* $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *(l'ensemble des fonctions réelles), muni de l'addition et de la multiplication suivantes :*

$$(+) : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (f, g) & \longmapsto & f + g \end{array} \quad \text{tel que } \forall x \in \mathbb{R} : (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

$$(\cdot) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda \cdot f \end{array} \quad \text{tel que } \forall x \in \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

Montrer que $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

1.1.2 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1. $\forall (x, y) \in \mathbf{E}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$

   En effet : $\lambda \cdot (x - y) + \lambda \cdot y = \lambda \cdot (x - y + y) = \lambda \cdot x \Longrightarrow \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y.$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 0_{\mathbf{E}} = 0_{\mathbf{E}}$ (il suffit de poser dans 1. $x = y$.)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{E} :\ \lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$. En effet
$\lambda \cdot (-x) = \lambda \cdot (0_{\mathbf{E}} - x) = \lambda \cdot 0_{\mathbf{E}} - \lambda \cdot x = 0_{\mathbf{E}} - \lambda \cdot x = -\lambda \cdot x$.
4. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{E} : (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$. En effet
$(\alpha - \beta) \cdot x + \beta \cdot x = (\alpha + \beta - \beta) \cdot x = (\alpha + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = \alpha \cdot x \Longrightarrow (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$.
5. $\forall x \in \mathbf{E} :\ 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbf{E}}$ (il suffit de poser dans 4. $\alpha = \beta$).
6. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{E} :\ (-\lambda) \cdot x = (0_K - \lambda) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x - \lambda \cdot x = 0_{\mathbf{E}} - \lambda \cdot x = -\lambda \cdot x$.

Remarque 1.2. On a $0_{\mathbb{K}} \cdot x = \lambda \cdot 0_{\mathbf{E}} = 0_{\mathbf{E}}$. Donc dans tout espace vectoriel :
$\lambda \cdot x = 0_{\mathbf{E}} \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_{\mathbf{E}}$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2. On appelle **sous-espace-vectoriel** (en abréviation s.e.v.) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ toute partie non vide $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ stable par l'addition (loi interne interne de $\mathbf{E}$) et la multiplication (loi externe de $\mathbf{E}$), qui a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les lois de $\mathbf{E}$ induites sur $\mathbf{F}$.

Proposition 1.1. *(**Caractérisation d'un sous-espace vectoriel**) Une partie $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ si et seulement si :*
(1) $\mathbf{F} \neq \emptyset$ *($0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$).*
(2) $\mathbf{F}$ *est stable pour (+) :* $\forall x, y \in \mathbf{F},\ x + y \in \mathbf{F}$.
(3) $\mathbf{F}$ *est stable pour* $(\cdot)$: $\forall x \in \mathbf{F}, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot x \in \mathbf{F}$.

Preuve. $\Longrightarrow$) • $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $\mathbf{F}$ est un s.e.v. et $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$.
• $\forall\ x, y \in \mathbf{F}$, $x + y \in \mathbf{F}$ (car $(+)$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{F}$).
• $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in \mathbf{F}$ (car $(\cdot)$ est une loi de composition externe dans $\mathbf{F}$)
$\Longleftarrow$) On a : $\lambda \cdot x \in \mathbf{F}\quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{F}$.
Soit $\lambda = -1 \Longrightarrow -x \in \mathbf{F}$.

On a aussi : $\forall x, y \in \mathbf{F},\ x+y \in \mathbf{F} \Longrightarrow x-x \in \mathbf{F} \Longrightarrow 0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$.

D'où $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. □

Remarque 1.3. D'après la démonstration ci-dedssus, on peut remplacer **(2)**, **(3)** par les conditions équivalentes :

(2') $\forall x, y \in \mathbf{F},\ x-y \in \mathbf{F}$.

(3) $\forall x \in \mathbf{F}, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot x \in \mathbf{F}$.

Exemple 1.2.

1. *La partie* $\mathbf{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x+y=0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.
2. *L'ensemble des fonctions réelles continues* $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue*$\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{R}\}$.
3. *Toute droite passant par l'origine est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *et les droites ne passant pas par l'origine, ne sont pas des s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.2. *Pour qu'une partie non vide* $\mathbf{F}$ *soit un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{E}$*, il faut et il suffit que :* $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbf{F} :\ (\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \in \mathbf{F}$

Remarque 1.4. Tout s.e.v. de $\mathbf{E}$ n'est jamais vide, il contient toujours $0_{\mathbf{E}}$. Le plus petit s.e.v.(pour l'inclusion) est $\{0_{\mathbf{E}}\}$ et le plus grand est $\mathbf{E}$.

Preuve. $\Longrightarrow$) Supposons que $\mathbf{F}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$, d'après la caractérisation d'un s.e.v. $\forall x, y \in \mathbf{F},\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, on a : $\alpha \cdot x \in \mathbf{F}$, $\beta \cdot y \in \mathbf{F}$ et $(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \in \mathbf{F}$

$\Longleftarrow$) Supposons que $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbf{F} :\ (\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \in \mathbf{F}$. Montrons que $\mathbf{F}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$.

On a $\mathbf{F} \neq \emptyset$ car $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$: il suffit de prendre $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{K}}$.

D'autre part pour $\alpha = \beta = \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \Longrightarrow \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \cdot x + \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \cdot y = x + y \in \mathbf{F}$.

Pour $\beta = 0_{\mathbb{K}} \Longrightarrow \alpha \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot y = \alpha \cdot x \in \mathbf{F}$. □

Proposition 1.3. *Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Preuve. Soient $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbf{E}$. Montrons que $\mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$

1. On a : $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}_1$ et $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}_2 \Longrightarrow 0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2$

   On a $\mathbf{F}_1$ s.e.v. de $\mathbf{E} \Longrightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbf{F}_1$.

   $\mathbf{F}_2$ s.e.v. de $\mathbf{E} \Longrightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbf{F}_2$.

   D'où $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2$. Donc $\mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$.

□

Remarque 1.5. L'union de deux sous-espaces vectoriel n'est pas en général un sous-espace vectoriel. En effet voici un contre exemple :
Soit $\mathbf{F}_1 = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbf{F}_2 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ deux s.e.v. de $\mathbb{R}^2$
$\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable pour l'addition :
en effet $(0, 1) \in \mathbf{F}_1$ et $(1, 0) \in \mathbf{F}_2$ mais $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$.

1.2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel

Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$. On appelle **s.e.v. engendré par A** le plus petit s.e.v.(au sens de l'inclusion), contenant $\mathbf{A}$.
C'est également l'intersection de tous les sous-espaces contenant A.

1.3 Combinaison linéaire (C.L)

Définition 1.3. Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des vecteurs de $\mathbf{E}$. Tout élément x de la forme
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$, avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ est appelé **combinaison linéaire** des x_i

Théorème 1.1. *Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbf{E}$.*
L'ensemble $\mathbf{F} = \{x = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i, \ \alpha_i \in \mathbb{K}\}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$. C'est le plus petit s.e.v. contenant la famille donnée.

Remarque 1.6. $\mathbf{F}$ est dit engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ oubien $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ est une famille **génératrice** de $\mathbf{F}$. On écrit $\mathbf{F} =< x_1, x_2, \ldots, x_p >$.

Preuve. (du théorème 1.1) $\mathbf{F} = \{x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

1. $\mathbf{F} \neq \emptyset$ car pour $\alpha_i = 0_{\mathbb{K}},\ \forall i = \overline{1,p} : x = 0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$.
2. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ x, y \in \mathbf{F} \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i;\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$ et $y = \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i;\quad \beta_i \in \mathbb{K}$ Alors $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i) + \beta(\sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i) = \sum_{i=1}^{p} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) x_i = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i x_i$ avec $\gamma_i = \alpha\alpha_i + \beta\beta_i$ D'où $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbf{F}$. Par conséquent $\mathbf{F}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$.
3. $\mathbf{F}$ est le plus petit s.e.v. de $\mathbf{E}$ en effet : Soit $\mathbf{F}'$ un s.e.v. de $\mathbf{E}$ contenant $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in \mathbf{F}'$ or $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in \mathbf{F} \subset \mathbf{F}'$.

$\square$

1.3.1 Famille libre

Définition 1.4. On dit que la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. est **libre** ou les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont **linéairement indépendants (L.I)** si la relation suivante est vérifiée : $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0_{\mathbf{E}} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Remarque 1.7. Toute sous famille d'une famille libre est libre.

Exemple 1.3. ***1.*** $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$. *Les vecteurs* $e_1 = (1, 0; 0),\ e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$ *sont linéairement indépendants. En effet*

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

2. $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *est un* $\mathbb{R} - e.v.$

Les fonctions $f_1(x) = e^x$ *et* $f_2(x) = e^{2x}$ *sont L.I. en effet :*

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0$ *alors*

$$\begin{cases} \alpha e^x + \beta e^{2x} = 0, & \ldots(1) \\ \alpha e^x + 2\beta e^{2x} = 0, & \ldots(2)\ (\textit{en dérivant l'équation (1)}) \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve $\alpha = \beta = 0$. *D'où* $\{e^x, e^{2x}\}$ *est une famille libre de* $\mathcal{F}$.

1.3.2 Famille liée

Définition 1.5. Si la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ n'est pas libre, elles dite **liée** c'est à dire que les α_i de l'équation $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ **ne sont pas tous nuls**.

Exemple 1.4. $\mathbf{F} = \{x_1 = (1,0,0), x_2 = (1,1,0), x_3 = (5,3,0)\}$ *est une famille liée de* $\mathbb{R}^3$ *en effet : on remarque que* $x_3 = 2x_1 + 3x_2$*. C'est à dire* $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ *et les coefficients ne sont pas nuls.*

Théorème 1.2. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v. et* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *sont des vecteurs de* $\mathbf{E}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) *La famille* $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ *est liée.*

(2) *L'un au moins des* x_i *est combinaison linéaire des autres.*

Preuve. (1) $\Longrightarrow$ (2) On suppose que $\mathbf{F}$ est liée $\Longrightarrow$ il existe un scalaire non nul tel que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0_{\mathbf{E}}$. Supposons que c'est α_p.

Donc $x_p = -\frac{\alpha_1}{\alpha_p}x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_p}x_2 - \ldots - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}x_{p-1} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{p-1}x_{p-1}$, avec $a_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_p} \in \mathbb{K}$.

D'où x_p est C.L. des autres vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que X_p est C.L. des autres x_i, $i \neq p$, donc $\exists \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1} \in \mathbb{K}$ tel que :

$x_p = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_{p-1} x_{p-1} \Longrightarrow \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_{p-1} x_{p-1} - x_p = 0_{\mathbf{E}}$ mais $\mu_p = -1$.

D'où $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ est liée. $\square$

Remarque 1.8. **1.** Dès qu'on rajoute le vecteur nul à une famille libre, elle devient liée.

2. Soit $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ une famille générartice de $\mathbf{E}$ (tout vecteur de $\mathbf{E}$ s'écrit comme C.L. des x_i). Toute famille $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{E}$ contenant $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F} \subset \mathbf{F}'$) est encore famille génératrice.

Exercice 1.2. *Dans* $\mathbb{R}^2$*. Soit* $v_1 = (1,1)$ *et* $v_2 = (1,-1)$*. Montrer que la famille* $\{v_1, v_2\}$ *est une famille génératrice et libre de* $\mathbb{R}^2$*.*

Définition 1.6. $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ est dite famille **génératrice minimale** si et seulement si $\mathbf{F} \setminus \{x_i\}, \quad \forall i = \overline{1,p}$ n'est plus génératrice.

Théorème 1.3. *Toute famille génératrice minimale de* $\mathbf{E}$ *est libre.*

Preuve. (par l'absurde)

Soit $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ une famille génératrice minimale de $\mathbf{E}$

Supposons due $\mathbf{F}$ est liée, d'après le théorème (1.2) $\Longrightarrow \exists \beta_i : \ x_p = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_{p-1} x_{p-1}$

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in \mathbf{E}$

On a $x = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i + \alpha_p \sum\limits_{i=1}^{p-1} \beta_i x_i$. Donc $x = \sum\limits_{i=1}^{p-1} (\alpha_i + \alpha_p \beta_i) x_i$ d'où $\exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{p-1} \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \gamma_i x_i \Longrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\} = \mathbf{F} \setminus \{x_i\}$ est génératrice (absurde car $\mathbf{F}$ est génératrice minimale). D'où $\mathbf{F}$ est libre. $\square$

Définition 1.7. Une famille $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ de vecteurs de $\mathbf{E}$ est dite **libre maximale** si $\mathbf{F} \cup \{x_{p+1}\}$ est liée (n'est pas libre).

Théorème 1.4. *Toute famille libre maximale de* $\mathbf{E}$ *est génératrice de* $\mathbf{E}$. *c'est à dire* $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ *libre maximale* $\Longrightarrow \mathbf{E} =< x_1, x_2, \ldots, x_p >$.

Preuve. (par l'absurde)

Soit $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ une famille libre maximale de $\mathbf{E}$. Supposons que $\mathbf{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbf{E}$ alors $\exists x \in \mathbf{E} : \forall i = \overline{i, p}, \ x \neq \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$ donc $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, x\}$ est libre. Contradiction avec le fait que $\mathbf{F}$ libre maximale de $\mathbf{E}$. D'où $\mathbf{F}$ est génératrice de $\mathbf{E}$. $\square$

Théorème 1.5. *(**et définition**) Soit* $\mathbf{F}$ *une partie non vide d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* $\mathbf{E}$ ($\mathbf{F} \neq \{0_{\mathbf{E}}\}$). *Alors les propriétés suivantes sont sont équivalentes :*

(1) $\mathbf{F}$ *est une famille génératrice est libre de* $\mathbf{E}$.

(2) $\mathbf{F}$ *est génératrice minimale.*

(3) $\mathbf{F}$ *est libre maximale.*

1.4 Bases en dimension finie

Définition 1.8. Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v. On dit que $\mathbf{E}$ est de **dimension finie** s'il existe une famille **génératrice finie** de $\mathbf{E}$.

Définition 1.9. Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbf{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ est **une base** de $\mathbb{E}$ si $\mathbf{B}$ est une famille génératrice et libre à la fois de $\mathbf{E}$.

Exemple 1.5. $\mathbf{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *appelée la base* ***canonique*** *de* $\mathbb{R}^3$. *En effet :*
on a $\mathbf{B}$ *est libre et* $\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \Longrightarrow \mathbf{B}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1.6. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *une base de* $\mathbf{E}$ *si et seulement si* $\forall x \in \mathbf{E},\ x$ *s'écrit de manière* ***unique*** *sous la forme* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ *avec* $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Preuve. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbf{E} \Longrightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est génératrice, alors $\forall x \in \mathbf{E} : x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$.
Montrons l'unicité de l'écriture. Supposons que $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} : x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \alpha_i) e_i = 0_{\mathbf{E}} \\
&\Longrightarrow \lambda_i - \alpha_i = 0_{\mathbb{K}} \ \text{ car } \{e_i\}_{i=\overline{1,n}} \ \text{ est libre} \\
&\Longrightarrow \alpha_i = \lambda_i,\ \forall i = \overline{1,n}
\end{aligned}$$

Donc la décomposition $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ est unique. □

Remarque 1.9. Les $\alpha_i, i = \overline{1,n}$ sont les composantes (coordonnées) de x dans la base $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Proposition 1.4. *Tout espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension finie admet au moins une base.*

Preuve. $\mathbf{E}$ de dimension finie alors $\mathbf{E}$ est engendré par une famille finie de vecteurs, comme $\mathbf{E} \neq \{0_{\mathbf{E}}\}$ alors il existe au moins un vecteur libre. D'où il existe au moins une base de $\mathbf{E}$. $\square$

Définition 1.10. **La dimension** d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ est le nombre de vecteurs qui forment une base de $\mathbf{E}$. On la note $\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{E}$.

Remarque 1.10. $\mathbf{E} = \{0_{\mathbf{E}}\} \Longrightarrow \mathbf{E}$ n'a pas de base et $\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{E} = 0$.

Exemple 1.6. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3, \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$

Théorème 1.7. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nomre d'éléments.*

Preuve. Soit $\mathbf{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, $\mathbf{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_q\}$ deux bases de $\mathbf{E}$.
Montrons que $p = q$ (il suffit de montrer que $q \leq p$ et $p \leq q$)
On a $\mathbf{B}_1$ une base, donc $\forall w_i \in \mathbf{B}_2 : \quad w_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}$
Si $q > p$ alors $\mathbf{B}_2$ est liée (impossible) car $\mathbf{B}_2$ est une base, d'où $q \leq p$
D'autre part on a $\mathbf{B}_2$ est une base, donc $\forall e_i \in \mathbf{B}_1, e_i = \sum_{j=1}^{q} \beta_j w_j, \quad \beta_j \in \mathbb{K}$
si $p > q$ alors $\mathbf{B}_1$ est liée (impossible) car $\mathbf{B}_1$ est une base, donc $p \leq q$. D'où $p = q$ $\square$

Corollaire 1.1. *Dans un espace vectotiel de* $\dim n$ *sur* $\mathbb{K}$ *on a :*
(1) *Toute partie* ***libre*** *a* ***au plus*** *n éléments.*
(2) *Toute partie ayant* ***au moins*** *$(n+1)$ éléments est* ***liée****.*

Corollaire 1.2. *Toute partie non vide $\mathbf{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, possédant* ***deux des trois propriétés*** *suivantes est* ***une base***
(1) $\mathbf{B}$ *a n éléments.*
(2) $\mathbf{B}$ *est libre.*
(3) $\mathbf{B}$ *engendre* $\mathbf{E}$.

Théorème 1.8. *Soient $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ deux sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, $(\mathbf{E} \neq \{0_{\mathbf{E}}\})$ de dimension finie.*

(1) $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{F}_1 \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{F}_2$.

(2) $(\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2$ *et* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{F}_1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{F}_2) \Longrightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$.

Théorème 1.9. *(**de la base incomplète**) Soit* $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.* $\mathbf{L}$ *une partie libre de* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{G}$ *une partie génératrice de* $\mathbf{E}$*, alors il existe une partie* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$ *telle que* $\mathbf{B} = \mathbf{H} \cup \mathbf{L}$ *soit une base de* $\mathbf{E}$.

1.5 Somme et Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux s.e.v. de $\mathbf{E}$.

Définition 1.11. (**Somme**)
Le sous ensemble défini par $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \{z = x + y : \ x \in \mathbf{F}, \ y \in \mathbf{G}\}$ est appelé **somme** de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$.

Proposition 1.5. $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ *est un s.e.v. de* $\mathbf{E}$ *engendré par* $\mathbf{F} \cup \mathbf{G}$ *(c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois* $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{G}$*.)*

Preuve. **1.** On a $0_{\mathbf{E}} = 0_{\mathbf{E}} + 0_{\mathbf{E}}$ avec $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$ et $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{G}$.
D'où $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F} + \mathbf{G}$.
2. Soit $z_1, \ z_2 \in \mathbf{F} + \mathbf{G}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha z_1 + \beta z_2 \in \mathbf{F} + \mathbf{G}$.

$$\begin{aligned} \alpha z_1 + \beta z_2 &= \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) \ \text{ avec } \ x_1, x_2 \in \mathbf{F} \text{ et } y_1, y_2 \in \mathbf{G} \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &\in \mathbf{F} + \mathbf{G} \ \text{ car } \ \mathbf{F}, \mathbf{G} \text{ sont des s.e.v. de } \mathbf{E} \end{aligned}$$

D'où $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$.
3. D'autre part c'est le plus petit s.e.v. contenant $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ en effet tout élément x de $\mathbf{F}$ s'écrit $x = x + 0_{\mathbf{E}}$ avec $x \in \mathbf{F}$ et $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{G}$, d'où $x \in \mathbf{F} + \mathbf{G}$. De même pour tout élément y de $\mathbf{G}$ s'écrit $y = 0_{\mathbf{E}} + y$ avec $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{F}$. Donc $y \in \mathbf{F} + \mathbf{G}$. Par conséquent $\mathbf{F} \subset \mathbf{F} + \mathbf{G}$ et $\mathbf{G} \subset \mathbf{F} + \mathbf{G}$.

De plus si $\mathbf{H}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$ tel que $\mathbf{F} \subset \mathbf{H}$ et $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$, alors montrons que $\mathbf{F} + \mathbf{G} \subset \mathbf{H}$. Si $u \in \mathbf{F} \Longrightarrow u \in \mathbf{H}$, de même si $v \in \mathbf{G} \Longrightarrow v \in \mathbf{H}$, comme $\mathbf{H}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$ alors $u + v \in \mathbf{H}$. D'où $\mathbf{F} + \mathbf{G} \subset \mathbf{H}$. $\square$

Définition 1.12. (**Somme directe**)
On dit que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont **supplémentaires** dans $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{E}$ est **somme directe** de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ et on écrit $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$ si : $\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{F} + \mathbf{G} \\ \mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\} \end{cases}$

Exemple 1.7. *Soit le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}$ le s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ engendré par $v_1 = (2,1)$ et $\mathbf{G}$ est le s.e.v. de $\mathbf{R}^2$ engendré par $v_2 = (0,1)$. Montrons que $\mathbb{R}^2 = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $(x,y) = u + v$ avec $u \in \mathbf{F}$ et $v \in \mathbf{G}$ c'est à dire cherchons $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = \alpha v_1 + \beta v_2 \Longrightarrow (x,y) = \alpha(2,1) + \beta(0,1)$. On trouve $\alpha = \frac{x}{2}$ et $\beta = y - \frac{x}{2}$. Il reste à montrer que $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\}$.
Soit $X \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G} \Longrightarrow \begin{cases} X \in \mathbf{F} \Longrightarrow X = \alpha(2,1),\ \alpha \in \mathbb{R} \\ X \in \mathbf{G} \Longrightarrow X = \alpha(2,1),\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$
$\alpha(2,1) = \beta(0,1) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$. D'où $X = 0_{\mathbf{E}}$.

Théorème 1.10. ***(et définition)***
Etant donné deux s.e.v. $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbf{E}$ tels que $\mathbf{E} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes
(1) *La décomposition de tout élément $x \in \mathbf{E}$ en somme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathbf{F}$ et $x_2 \in \mathbf{G}$ est **unique**.*
(2) $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\}$.
Lorsque l'une des deux conditions est vérifiée, on dit que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux espaces supplémentaires de $\mathbf{E}$.

Théorème 1.11. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie, tout sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ admet au moins un supplémentaire $\mathbf{G}$ et :*
$\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G} \Longrightarrow \dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G}$.
La réciproque est fausse.
Cependant : $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G}$ *et* $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0_{\mathbf{E}}\} \Longrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$.

Remarque 1.11. Attention ! Supplémentaire de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{E}$ n'est pas le complémentaire de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{E}$. D'ailleurs $C_{\mathbf{E}}\mathbf{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ car $0_{\mathbf{E}} \notin C_{\mathbf{E}}\mathbf{F}$.

Exemple 1.8. *Soit $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, tels que :*
$\mathbf{F} =< u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,2,5) >$ *et* $\mathbf{G} =< v = (3,5,5) >$.
A t-on $\mathbb{R}^3 = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$?
On a $\{u_1, u_2\}$ est libre de $\mathbf{F} \Longrightarrow \dim \mathbf{F} = 2$ et comme $v \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \dim \mathbf{G} = 1$
donc $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G}$ mais on a $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$ car $v = 3u_1 + u_2$ par conséquent $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} \neq \{0_{\mathbf{E}}\}$ donc $\mathbb{R}^3 \neq \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$.

Exercice 1.3. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ et*
$\mathbf{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
$\mathbf{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.
1. Montrer que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$.

Théorème 1.12. *Soit $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G})$.*

Preuve. On pose $I = \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$
Soit $\mathbf{H}_1$ un supplémentaire de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{F}$ c'est à dire $\mathbf{F} = \mathbf{I} \oplus \mathbf{H}_1 \Longrightarrow \dim \mathbf{F} = \dim \mathbf{I} + \dim \mathbf{H}_1$ et soit $\mathbf{H}_2$ un supplémentaire de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{G}$ c'est à dire :
$\mathbf{G} = \mathbf{I} \oplus \mathbf{H}_2 \Longrightarrow \dim \mathbf{G} = \dim \mathbf{I} + \dim \mathbf{H}_2$.
Montrer d'abord que $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{I} \oplus \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$. (**à faire en exercice**)
Par la suite on aura

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \dim \mathbf{I} + \dim \mathbf{H}_1 + \dim \mathbf{H}_2 \\ &= \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) + \dim \mathbf{F} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) + dim\mathbf{G} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \end{aligned}$$

D'où $\dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G})$. □

Envoyer vos réponses (série TD 1) et vos questions à l'adresse e-mail : *l_berdjoudj@yahoo.fr*

Bibliographie

[1] J. Grifone, « *Algèbre linéaire.* » Paris : Cepadues, 2015. **Côte : 512.5/109**

[2] A. Pillier, « *Algèbre linéaire : manuel d'exercices corrigés avec rappels de cours +interros.* » Paris : Premium, 2013. **Côte : 512.5/108**

[3] D. Prochasson, « *Algèbre : 1ère année : exercices corrigés.* » Paris : Francis Lefebvre, 2003. **Côte : 512/15**

[4] M. Queysanne, « *Algèbre : 1er cycle scientifique, préparation aux grandes écoles.* » Paris : Armand Colin, 1964. **Côte : 512/73**