

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche scientifique



Université Abderrahmane Mira BEJAIA

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

Cours polycopié

Dynamique des Structures

Dr. Safia BOUZIDI

Ce cours est conforme aux nouveaux programmes établis par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Algérien, selon la réforme appliquée durant l'année universitaire 2015-2016.

Ce cours se déroule pendant le deuxième semestre.

Niveau d'étude : 3ème année Licence Génie Mécanique, Spécialité : Construction Mécanique.

Programme

Chapitre I : Introduction à la dynamique des structures (2 semaines)

Objectif de la dynamique des structures, Caractéristiques d'un problème dynamique, Types de chargements, Mouvements harmoniques simples, Représentation vectorielle des mouvements harmoniques.

Chapitre II : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté (4 semaines)

Excitation harmonique, Excitation périodique, Excitation dynamique quelconque.

Chapitre III : Systèmes à n degrés de liberté (5 semaines)

Propriétés des matrices, Calcul des fréquences et des modes, Réponse à une excitation.

Chapitre IV : Systèmes continus (4 semaines)

Équations des mouvements, Fréquences, modes et orthogonalité.

Tables des matières

Chapitre I : Introduction à la dynamique des structures

Introduction.....	01
I.1- Objectif de la dynamique des structures.....	01
I.2- Caractéristiques d'un problème dynamique.....	01
I.3- Types de chargements.....	02
I.4- Équation du mouvement.....	04
I.5- Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres.....	05
I.5.1- Oscillations libres non amorties.....	06
I.5.2- Oscillations libres amorties.....	08
I.5.2.1- Système à amortissement critique.....	09
I.5.2.2- Systèmes sur amortis.....	10
I.5.2.3- Systèmes sous amortis.....	11
Exercice d'application.....	13

Chapitre II : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

Introduction.....	15
II.1- Équation du mouvement.....	15
II.2- Sollicitation harmonique.....	16
II.2.1- Résonance.....	20

II.2.2- Isolation vibratoire.....	22
II.3- Sollicitation périodique.....	27
II.4- Sollicitation quelconque.....	28
II.4.1- Calcul approché de la réponse à un chargement par impulsion de courte durée.....	28
II.4.2- Sollicitation quelconque - Intégrale de Duhamel.....	29
Exercice d'application.....	31

Chapitre III : Systèmes à n degrés de liberté

Introduction.....	33
III.1- Exemple d'un système à deux degrés de liberté.....	33
III.2- Système à plusieurs degrés de liberté - cas non amorti.....	35
III.2.1- Orthogonalité des modes propres de vibration.....	36
III.2.2- Régime libre.....	37
III.3- Système avec amortissement.....	38
III.4- Système forcé.....	39
Exercice d'application.....	40

Chapitre IV : Systèmes continus

Introduction.....	42
-------------------	----

IV.1- Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite.....	42
IV.2- Vibrations des barres et poutres.....	45
IV.2.1- Vibrations longitudinales des barres.....	45
IV.2.1.1- Équation d'équilibre dynamique.....	45
IV.2.1.2- Modes propres.....	46
IV.2.2- Vibrations des poutres en flexion simple.....	47
IV.2.2.1- Équation d'équilibre dynamique.....	47
IV.2.2.2- Modes propres.....	47
IV.3- Orthogonalité des modes.....	48
Exercice d'application.....	48

Références bibliographiques

Avant propos

Ce cours est destiné aux étudiants de troisième année de Licence génie mécanique, spécialité construction mécanique. Ce cours présente une introduction à la dynamique des structures, un cours plus avancé est enseigné au niveau master aux étudiants de la section construction mécanique.

L'objectif principal de la dynamique des structures est l'étude de la réponse des structures soumises à une sollicitation dynamique arbitraire. Dans le cadre de ce cours, le chargement est supposé donné et par conséquent l'approche utilisée est déterministe.

Ce cours se décompose en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions de base de la dynamique des structures, la réponse des systèmes à un seul degré de liberté en régime libre sera exposée. Le deuxième chapitre est consacré essentiellement au calcul de la réponse dynamique aux différents types de chargements : harmonique, périodique, impulsif et quelconque via l'utilisation de l'intégrale de Duhamel.

Le chapitre trois sera consacré à l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté. On développe aussi la technique de l'analyse modale qui est basée sur la propriété d'orthogonalité des modes propres de vibrations.

Finalement, dans le quatrième chapitre, nous allons traiter la réponse propre des poutres droites en traction et en flexion simple.

Introduction

Le mouvement oscillatoire est l'un des mouvements les plus importants observés dans la nature. Dans le cas d'un système sans sollicitations extérieures, on parle d'oscillations libres. Pour un système conservatif, les oscillations sont non amorties et en présence de frottement, l'amplitude des mouvements décroît conduisant à des oscillations amorties.

Cette partie du cours traite des systèmes à un seul degré de liberté, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels le déplacement peut être représenté par une seule coordonnée.

Le modèle simple d'un oscillateur à un seul degré de liberté est constitué d'un bloc rigide de masse m , d'un ressort élastique de raideur k et d'un amortisseur visqueux de coefficient α . Le seul déplacement possible de l'oscillateur est dans la direction \vec{Ox} .

I.1- Objectif de la dynamique des structures

La dynamique des structures est la branche de la mécanique du solide qui concerne l'étude des oscillations des structures soumises à des sollicitations variables dans l'espace et le temps.

Dans bon nombre de secteurs industriels (comme par exemple l'automobile, l'aéronautique, le ferroviaire, le génie civil...etc.), il est primordial dans le cadre du dimensionnement et de la conception de déterminer les niveaux d'efforts que les structures peuvent supporter, mais également les propriétés amortissantes qu'elles peuvent développer.

I.2- Caractéristiques d'un problème dynamique

Dans un problème dynamique, la charge et la réponse varient avec le temps : une étude dynamique est donc plus complexe et moins rapide qu'une étude statique. Les forces d'inerties sont inhérentes au comportement dynamique des structures.

I.3- Types de chargements

Les différents types de chargements sont :

a- Chargement déterministe :

D'un point de vue analytique, on peut diviser les charges dynamiques en charges périodiques et non périodiques.

Périodique :

Les chargements périodiques sont constitués de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles (machines alternatives).

Le chargement harmonique est un cas particulier d'un chargement périodique ; dans ce cas, la sollicitation est décrite par une fonction sinusoïdale (machines tournantes).

Non périodique

Les charges non périodiques sont des charges variant de façon arbitraire dans le temps sans périodicité. Ces charges sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de formes quelconques données.

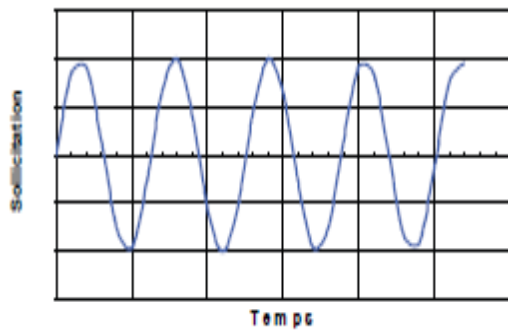
Charge impulsive : caractérisée par une sollicitation de courte durée (choc, explosion, rupture d'une pièce...).

Charge quelconque : la sollicitation est définie par une variation temporelle quelconque donnée.

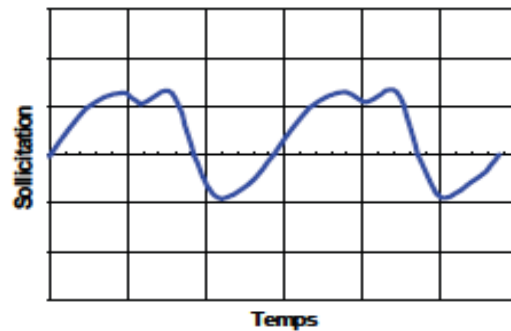
b- Chargement aléatoire

Le chargement est dit dynamique aléatoire si l'évolution de la charge n'est pas parfaitement connue mais peut être définie de manière statistique (impacts de roulement pour les trains, collision de véhicules, séismes, ...). Cette partie ne sera pas abordée dans ce cours.

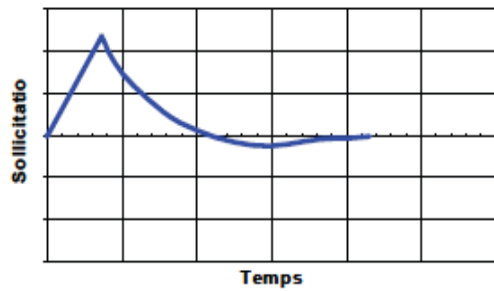
La figure (1) montre quelques formes types de ces chargements.



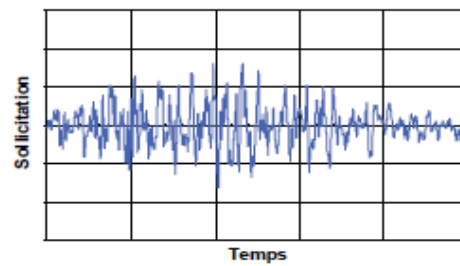
(a) Chargement harmonique.



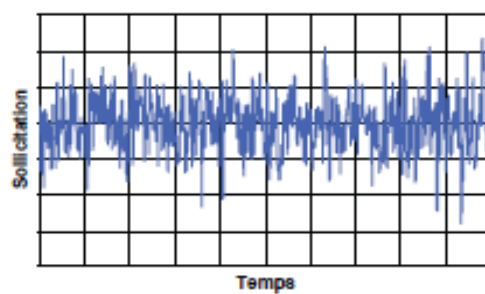
(b) Chargement périodique anharmonique.



(c) Chargement impulsif.



(d) Chargement quelconque de longue durée.



(e) Chargement aléatoire.

Fig. 1 : Exemples de charges dynamiques.

I.4- Équation du mouvement

On suppose que les efforts s'appliquent au centre de gravité de la masse, ces forces sont (voir Fig. 2) :

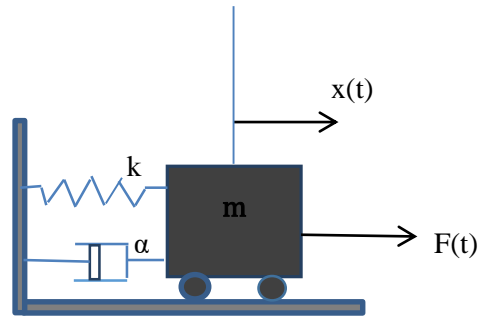


Fig. 2 : Système élémentaire à un degré de liberté (1ddl).

La force extérieure appliquée caractérise la sollicitation F ;

La force de rappel élastique $F_k = kx$;

La force due à l'amortissement $F_\alpha = \alpha\dot{x}$;

La force d'inertie s'exerçant sur la masse $F_i = m\ddot{x}$.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\sum F_{\text{ext}} = m\ddot{x} \tag{1a}$$

F_{ext} : forces extérieures.

$\ddot{x} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$: accélération.

$$(1a) \Leftrightarrow F - F_k - F_\alpha = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \tag{1b}$$

La solution de l'équation (1) est la somme de la solution de l'équation homogène obtenue en annulant le second membre et la solution particulière.

L'équation homogène de l'équation différentielle est la suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

Les mouvements du système en l'absence de chargement sont appelés oscillations libres.

Remarque :

On suppose dans le cadre des développements effectués dans ce cours que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Les masses sont ponctuelles ;
- Les ressorts sont parfaitement linéaires ;
- Les ressorts sont sans masse ;
- L'amortissement est de type visqueux ;
- Il n'y a pas de friction ;
- Le mouvement s'effectue dans le vide.

I.5- Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

Les oscillations libres sont caractérisées par l'équation différentielle du mouvement suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

L'équation différentielle admet comme solution :

$$x(t) = Ce^{st} \quad (3)$$

Où C est une constante d'intégration.

En substituant cette équation dans (2), on obtient :

$$(ms^2 + \alpha s + k)Ce^{st} = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 + \frac{\alpha}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{où } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

On distingue deux cas particuliers ; $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.

I.5.1- Oscillations libres non amorties

Dans ce cas, l'amortissement est nul, c'est-à-dire, $\alpha = 0$ et l'équation (4) se réduit à :

$$s^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow s = \pm i\omega \quad (5a)$$

La solution de l'équation (2) prend la forme :

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \quad (5b)$$

où A et B sont des constants d'intégration qu'on détermine à l'aide des conditions initiales du déplacement $x(0) = x_0$ et de la vitesse $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. la solution de l'équation (2) s'écrit (Fig. 3):

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) \sin\omega t + x_0 \cos\omega t \quad (5c)$$

C'est une fonction harmonique qui peut s'écrire :

$$x(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (5d)$$

$$\text{où : } \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \text{ et } \theta = \arctg\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}\right)$$

ρ : L'amplitude du mouvement,

ω (rad/s) : La pulsation propre du mouvement,

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s): La période propre du mouvement,

La fréquence propre $f = \frac{1}{T}$ (Hz) est le nombre de cycles que décrit l'oscillateur non amorti en une seconde.

La pulsation, la période et la fréquence sont propres à l'oscillateur non amorti quand il est mis en vibration libre. Ces propriétés dépendent de la masse et de la rigidité du système et elles sont invariables pour un oscillateur linéaire.

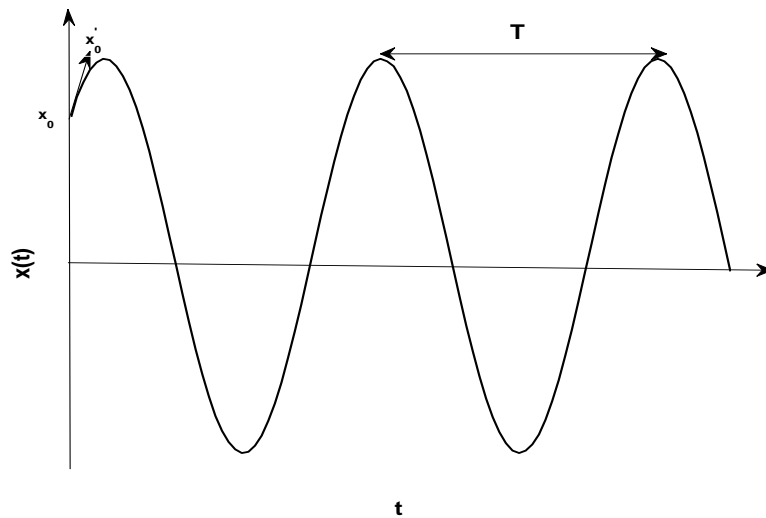


Fig. 3 : Oscillation libre d'un système non amorti.

Remarque :

L'expression de la vitesse est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\rho\omega\sin(\omega t - \theta) = \rho\omega\cos\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

La valeur maximale de la vitesse est : $V_{\max} = \rho\omega$. Le déphasage entre vitesse et position est de $\frac{\pi}{2}$. La représentation vectorielle est donnée ci-dessous (Fig. 4).

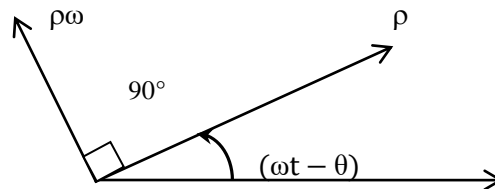


Fig.4 : Représentation vectorielle de l'amplitude et de la vitesse d'un oscillateur.

I.5.2- Oscillations libres amorties

Dans ce cas, le coefficient d'amortissement est non nul, c'est-à-dire, $\alpha \neq 0$, les solutions de l'équation (4) sont :

$$s_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (6a)$$

Et la solution de l'équation (2) est :

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (6b)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

I.5.2.1- Système à amortissement critique

Il correspond au cas où le discriminant est nul, c'est-à-dire, $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha_C = 2\sqrt{km}$$

$$\text{Et, } s_1 = s_2 = -\frac{\alpha}{2m} = -\omega \tag{7a}$$

La réponse du système s'écrit :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \tag{7b}$$

Où A et B sont des constantes d'intégration.

En exploitant les conditions initiales, on obtient (Fig. 5):

$$x(t) = (x_0 + (x_0\omega + \dot{x}_0)t)e^{-\omega t} \tag{7c}$$

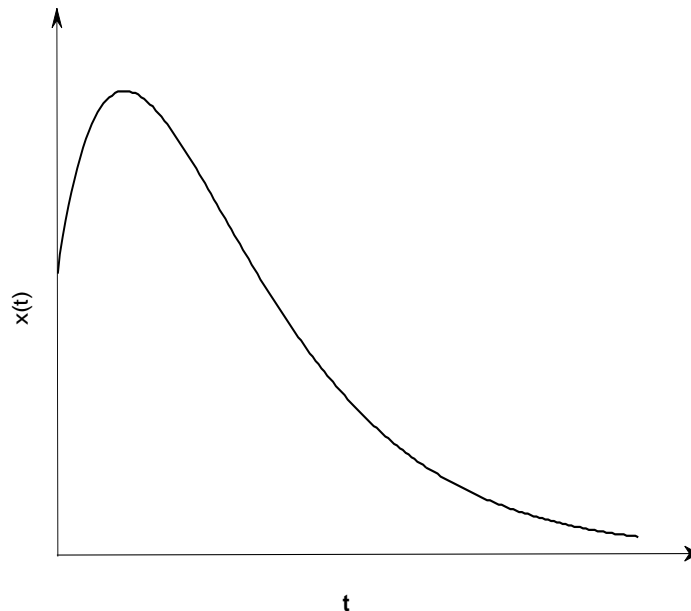


Fig. 5 : Oscillation libre d'un système à amortissement critique.

Remarque :

Dans ce cas, la réponse du système en vibrations libres ne comporte aucune oscillation autour de la position de déplacement nul, et le système revient à la position d'équilibre. L'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse ne comporte pas d'oscillations.

Soit $\xi = \frac{\alpha}{\alpha_c}$ le taux d'amortissement, les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} \Leftrightarrow s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

On note que l'amortissement critique correspond au cas $\xi = 1$.

I.5.2.2- Systèmes sur amortis

Ce cas correspond à $\xi > 1$ et la réponse du système s'écrit :

$$x(t) = \left(C_1 e^{\omega\sqrt{\xi^2-1}t} + C_2 e^{-\omega\sqrt{\xi^2-1}t} \right) e^{-\xi\omega t} \quad (8a)$$

qui peut s'écrire en fonction des conditions initiales :

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\hat{\omega}} \sinh(\hat{\omega}t) + x_0 \cosh(\hat{\omega}t) \right) e^{-\xi\omega t} \quad (8b)$$

$$\text{avec : } \hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Remarque :

La réponse d'un système sur amorti n'est pas oscillatoire, elle est comparable à celle d'un amortissement critique.

I.5.2.3- Systèmes sous amortis

Si l'amortissement est inférieur à l'amortissement critique, $\xi < 1$, on aura :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (9a)$$

La pulsation propre amortie est définie par :

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

L'amortissement a pour effet de diminuer la pulsation et par conséquent d'augmenter la période des oscillations d'un système par rapport au système correspondant non amorti.

La réponse d'un système sous amorti s'écrit :

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t + x_0 \cos\omega_d t \right) e^{-\xi\omega t} \quad (9b)$$

ou bien

$$x(t) = \rho \cos(\omega_d t - \theta) e^{-\xi\omega t} \quad (9c)$$

où :

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \right)^2 + x_0^2}$$

$$\text{et } \theta = \arctg\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{x_0 \omega_d} \right)$$

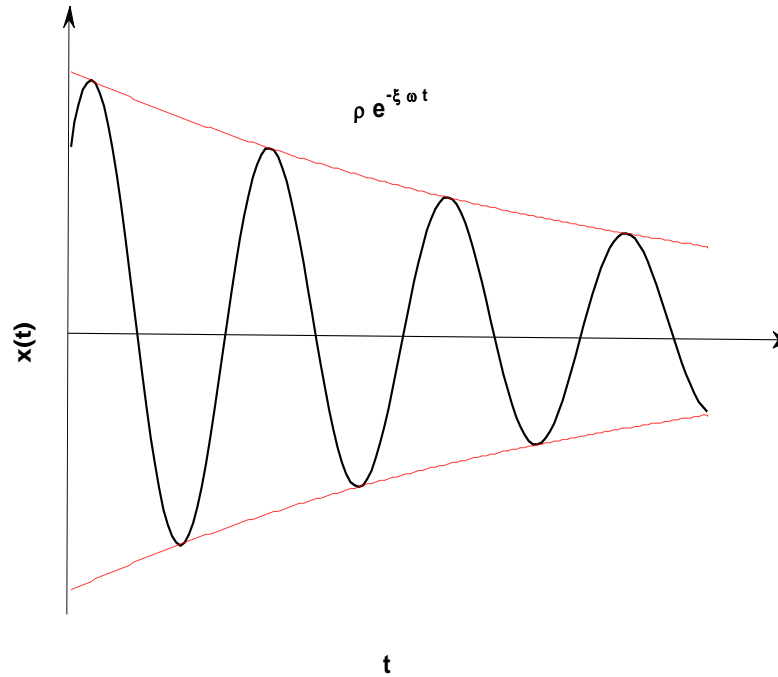


Fig. 6 Oscillation libre d'un système sous amorti.

Le système sous amorti oscille de part et d'autre de la position d'équilibre à la pseudo pulsation. Dans le cas du mouvement pseudo périodique, l'amplitude diminue exponentiellement (Fig. 6).

Le décrement logarithmique, est défini par :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \xi \omega T_d \tag{10a}$$

$$\text{On a : } \delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{10b}$$

Pour de faibles amortissements, l'équation (10b) se réduit à : $\delta \approx 2\pi\xi$.

Exercice d'application

Pour déterminer les propriétés dynamiques d'une structure à un seul degré de liberté, on effectue un essai de vibration libre en déplaçant le système de 20mm et en relâchant, on mesure un déplacement de 15mm au premier retour à un temps égal à 0.2s.

On demande de calculer la rigidité de la structure, l'amortissement et le rapport des amplitudes après trois cycles d'oscillations.

On donne $M=1941\text{Kg}$.

Solution

1- Calcul de la rigidité de la structure :

On a :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \delta = \ln \frac{x_0}{x_1} \approx 2\pi\xi$$

$$\text{Alors } \xi \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{20}{15} \Rightarrow \xi \approx 0.0458$$

La pulsation propre du système est donnée par :

$$\omega = \frac{2\pi}{0.2} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega = 31.45\text{rad/s}$$

La rigidité du système est donc :

$$k = m\omega^2 \Rightarrow k = 1941 \times 31.45^2 = 1920\text{kN/m}$$

2- Calcul de l'amortissement de la structure :

$$\text{On a : } \alpha = \xi \alpha_c$$

Où l'amortissement critique α_c est exprimé par :

$$\alpha_c = 2m\omega \Rightarrow \alpha_c = 2 \times 1941 \times 31.45 = 122088 \text{Ns/m}$$

Ce qui implique que : $\alpha = 0.0458 \times 122088 \Rightarrow \alpha = 5592 \text{Ns/m}$

3- Calcul du rapport des amplitudes après trois cycles d'oscillations :

Le décrément logarithmique est défini par :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \ln \frac{x_{N-1}}{x_N} \quad (\text{N est le nombre de cycles}).$$

$$\text{On a : } \frac{x_0}{x_N} = \frac{x_0}{x_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \dots \dots \dots \frac{x_{N-1}}{x_N} = e^\delta e^\delta e^\delta \dots \dots \dots e^\delta = e^{N\delta}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x_0}{x_N} \Leftrightarrow \frac{x_0}{x_N} = e^{N\delta}$$

$$\text{Alors } \frac{x_0}{x_3} = e^{3\delta} \Rightarrow \frac{x_0}{x_3} = e^{3 \left(\ln \frac{x_0}{x_1} \right)} = \left(\frac{x_0}{x_1} \right)^3 \Rightarrow \frac{x_0}{x_3} = 2.3703.$$

Introduction

L'objectif de la dynamique des structures est d'étudier les vibrations des systèmes causées par des charges dynamiques qui, contrairement à des charges statiques varient avec le temps.

Une charge dynamique est une charge dont la grandeur, la direction ou le point d'application varient avec le temps.

Dans ce cours, on s'intéressera à l'étude de la réponse dynamique de l'oscillateur sous amorti soumis à une sollicitation extérieure $F(t)$.

II.1- Équation du mouvement

L'équation du mouvement d'un système élémentaire à un seul degré de liberté est donnée par (cf. chapitre I) :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \quad (1)$$

La solution de l'équation (1) est la somme de la solution de l'équation homogène (sans second membre) et la solution particulière due au second membre (la force appliquée).

Dans le cas d'un système sous amorti, la solution de l'équation homogène est donnée par :

$$x(t) = \rho \cos(\omega_d t - \theta) e^{-\xi \omega t} \quad (2)$$

Elle constitue la réponse transitoire de l'oscillateur. Ce terme disparaît pour des valeurs importantes du temps et la réponse totale tend vers la solution stationnaire.

II.2- Sollicitation harmonique

Soit une fonction de chargement de type sinusoïdal d'amplitude constante F_0 et de pulsation ω :

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (3)$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (4)$$

La solution particulière de cette équation s'écrit sous la forme :

$$x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (5)$$

En substituant l'équation (5) dans (4), et en séparant les termes en sinus et en cosinus, on obtient :

$$(-A\omega^2 - B\omega(2\xi\omega) + A\omega^2)\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$(-B\omega^2 + A\omega(2\xi\omega) + B\omega^2)\cos\omega t = 0$$

Ce qui donne :

$$(1 - \beta^2)A - (2\xi\beta)B = \frac{F_0}{k}$$

$$(1 - \beta^2)B + (2\xi\beta)A = 0$$

où $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ est le rapport des fréquences.

d'où :

$$A = \frac{F_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

et

$$B = \frac{F_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

La solution particulière qui correspond au régime permanent s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left((1-\beta^2)\sin\omega t - 2\xi\beta\cos\omega t \right) \quad (6)$$

La réponse $x_p(t)$ s'exprime donc :

$$x_p(t) = \rho \sin(\omega t - \phi) \quad (7)$$

$$\text{où : } \rho = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \text{ et } \phi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

L'amplitude de la réponse peut s'écrire comme suit :

$$\rho = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{F_0}{k} D \quad (8)$$

où $\frac{F_0}{k}$ est le déplacement statique et D est le facteur d'amplification dynamique.

La figure (1) montre la variation de D en fonction du taux d'amortissement ξ et du rapport des fréquences β , nous avons :

- Pour un chargement statique, le facteur D vaut 1.
- Lorsque la pulsation de la force appliquée ω tend vers l'infini, le facteur d'amplification dynamique D tend vers zéro et cela quelle que soit la valeur du taux d'amortissement ξ .
- Lorsque la pulsation de la force appliquée ω coïncide avec la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 , le facteur d'amplification D passe par un maximum.

Si l'amortissement de l'oscillateur est nul, le facteur d'amplification dynamique devient infini.

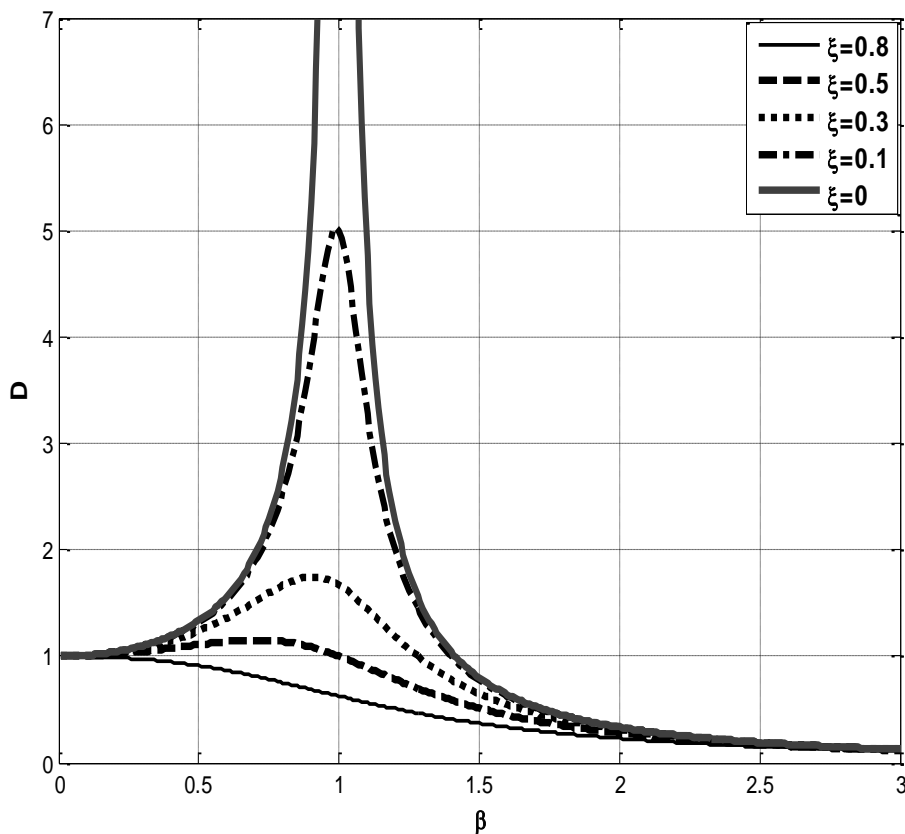


Fig. 1 : Facteur d'amplification dynamique.

La figure (2) montre la variation de la phase en fonction du taux d'amortissement ξ et du rapport des fréquences β , nous avons :

- Lorsque la pulsation est faible, la phase est nulle ou négligeable, on dit que le système répond instantanément à la sollicitation.

- Si le rapport des fréquences égal à l'unité, il se produit un déphasage de 90° entre la force appliquée et le déplacement de l'oscillateur.

- A haute fréquence, le déplacement se produit dans la direction opposée à la forcée. Le déplacement est maximal (en valeur absolue) au même instant que la force appliquée.

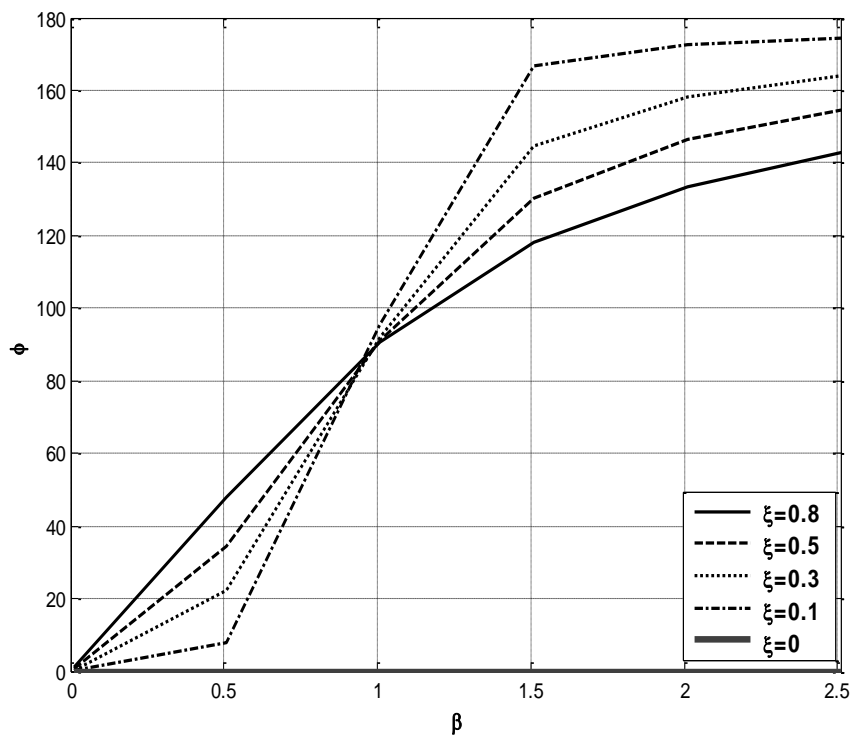


Fig. 2 : Phase de la réponse stationnaire.

II.2.1- Résonance

Lorsque la pulsation de la force appliquée est égale ou voisine de la pulsation propre du système, le facteur d'amplification dynamique tend vers l'infini. On dit que le système est en résonance, cet état peut conduire à une dégradation rapide des propriétés du système pouvant aller jusqu'à la ruine.

Le maximum de la réponse est donné par :

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0 \quad (9)$$

Ce qui implique que :

$$\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (10)$$

et

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (11a)$$

Pour de faibles amortissements, nous avons :

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi} \quad (11b)$$

Dans le cas d'un système faiblement amorti, l'amplitude de la réponse croît dans le temps mais reste bornée par la valeur $\frac{1}{2\xi}$ (voir Fig. 3).

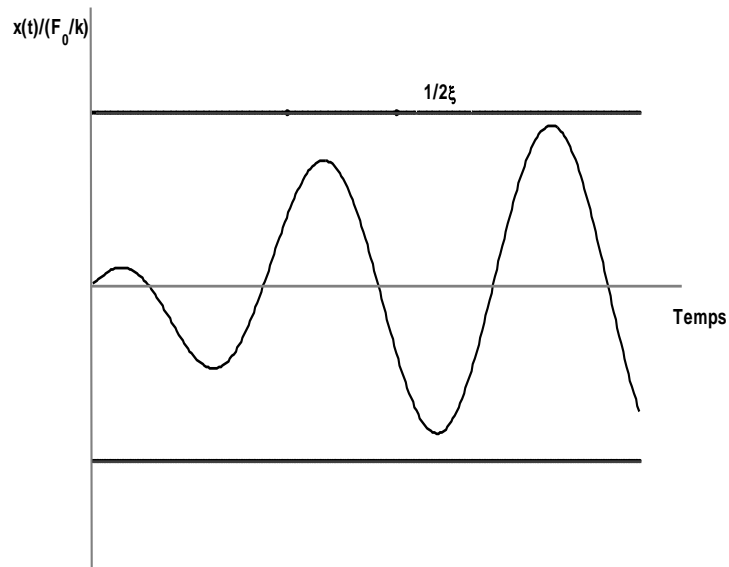


Fig. 3 : Évolution de l'amplitude de la réponse d'un système sous amorti en résonance.

Remarque :

Si l'amortissement est nul, l'amplitude de la réponse tend vers l'infini et le système devient instable.

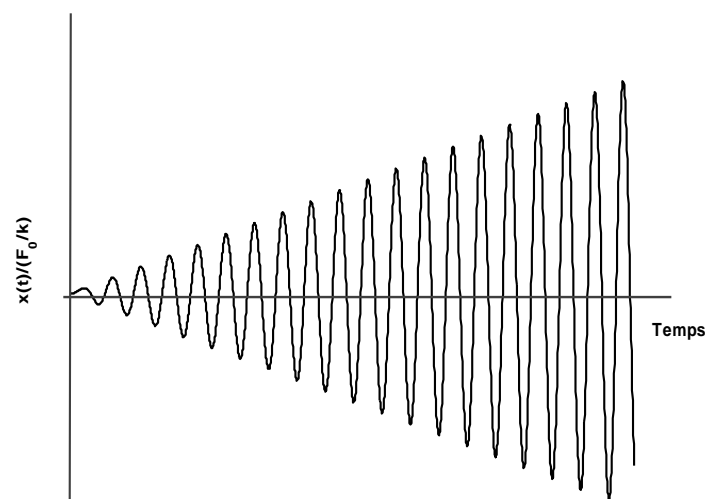


Fig. 4 : Évolution de l'amplitude de la réponse d'un système non amorti en résonance.

II.2.2- Isolation vibratoire

On est fréquemment confronté au problème de l'isolation d'une machine ou d'un équipement vis-à-vis de son support. Deux cas sont possibles :

- La machine génère des vibrations, et on veut réduire les forces transmises par ses vibrations.

- Le bon fonctionnement de l'équipement considéré implique qu'il ne subisse pas l'influence des vibrations du support auquel il est fixé.

Dans les deux cas, on conçoit la suspension de manière à ce qu'elle joue le rôle de filtre mécanique.

a- Isolation des machines :

Considérons le cas où l'on veut réduire les forces dynamiques transmises par une machine à la structure qui la supporte ou à son environnement immédiat.

Soit le système représenté sur la figure (5), la machine tournante produit une force verticale $F(t) = F_0 \sin \omega t$.

La machine est portée sur un support à un seul degré de liberté, et l'équation différentielle du mouvement est :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (12a)$$

et sa solution en régime permanent est :

$$x(t) = \rho \sin(\omega t - \phi) \tag{12b}$$

où : $\rho = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ et $\phi = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

La transmissibilité du système est définie comme étant le rapport de l'amplitude de la force transmise à la base à l'amplitude de la force appliquée :

$$TR = \frac{F_{res}}{F_0} = \frac{\rho \sqrt{k^2 + (\alpha\omega)^2}}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{13}$$

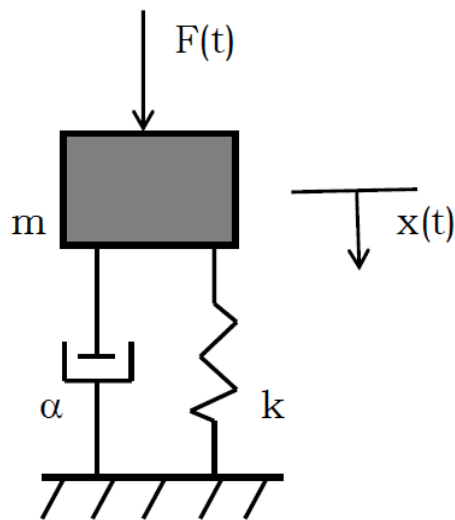


Fig. 5 : Système d'isolation vibratoire : Excitation par chargement.

b- Mouvement du support :

La masse m à isoler est portée par un système ressort - amortisseur sur un support soumis à des mouvements harmoniques verticaux ($y(t) = y_0 \sin \omega t$) (voir Fig. 6).

L'équation différentielle du mouvement de la masse est :

$$-k(x - y) - \alpha(\dot{x} - \dot{y}) = m\ddot{x} \quad (14)$$

On pose : $z = x - y$ alors :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\dot{y}$$

\Rightarrow

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = m\omega^2 y_0 \sin \omega t \quad (15a)$$

Sa solution particulière est :

$$z(t) = z_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (15b)$$

$$\text{où : } z_0 = \frac{m\omega^2 y_0}{k} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \text{ et } \phi = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\text{On a : } x = y + z \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{y}} + \underline{\underline{z}}$$

\Rightarrow

$$m\underline{\underline{\ddot{z}}} + \alpha\underline{\underline{\dot{z}}} + k\underline{\underline{z}} = m\omega^2 \underline{\underline{y}} \quad (15c)$$

où : $\underline{x} = x_0 e^{i(\omega t - \psi)}$, $\underline{y} = y_0 e^{i(\omega t)}$, $\underline{z} = z_0 e^{i(\omega t - \phi)}$

En remplaçant dans l'équation (15c), on obtient :

$$z_0 e^{-i\phi} = \frac{m\omega^2 y_0}{k - m\omega^2 + i\omega\alpha}$$

⇒

$$\underline{x} = e^{i(\omega t)} (y_0 + z_0 e^{-i\phi}) = y_0 e^{i(\omega t)} \left(\frac{k + i\omega\alpha}{k - m\omega^2 + i\omega\alpha} \right)$$

La transmissibilité du système est définie par :

$$TR = \frac{x_0}{y_0} = \sqrt{\frac{k^2 + (\alpha\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (16)$$

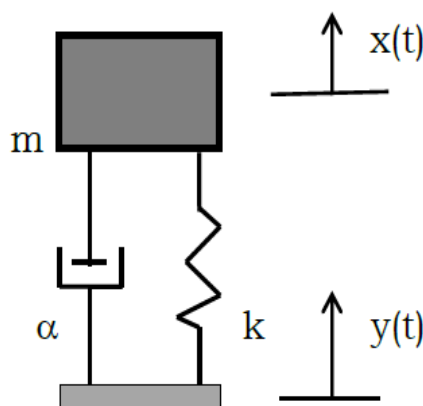


Fig. 6 : Système d'isolation vibratoire : Excitation par déplacement.

L'expression de la transmissibilité est la même pour les deux problèmes étudiés.

Il est clair qu'un système d'isolation vibratoire fonctionne bien si le rapport des fréquences est supérieur à $\sqrt{2}$ (voir Fig 7).

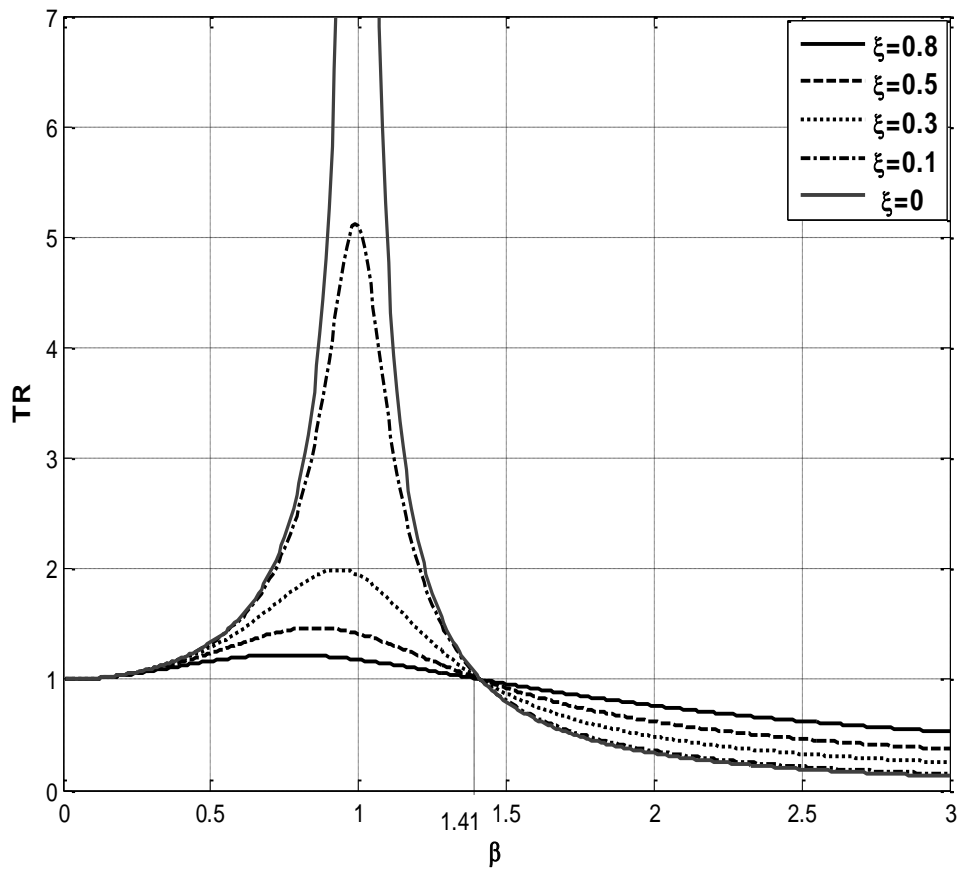


Fig. 7 : La transmissibilité TR en fonction de β et de ξ .

II.3- Sollicitation périodique

Une fonction périodique $F(t)$ de période \bar{T} peut être décomposée en la somme d'un nombre infini d'harmoniques en utilisant les séries de Fourier :

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (17a)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} F(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} F(t) \cos(n\omega t) dt, \quad (17b)$$

$$b_n = \frac{2}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} F(t) \sin(n\omega t) dt.$$

La réponse permanente est la somme de la composante $x_{p,0}(t) = \frac{a_0}{k}$ due au terme constant a_0 et des composantes harmoniques $x_{p,n}(t)$ définies par :

$$x_{p,n}(t) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left([(1-\beta_n^2)a_n - (2\xi\beta_n)b_n] \cos(\omega_n t) + [(1-\beta_n^2)b_n + (2\xi\beta_n)a_n] \sin(\omega_n t) \right), \quad (18a)$$

où $\beta_n = n\beta$ et $\omega_n = n\omega$

Il vient alors :

$$x_p(t) = x_{p,0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x_{p,n}(t) \quad (18b)$$

II.4- Sollicitation quelconque

II.4.1- Calcul approché de la réponse à un chargement par impulsion de courte durée

Considérons une charge impulsive dont la durée de l'application t_1 est très courte (voir Fig.8).

Si t_1 est très courte par rapport à la période de vibration, nous pouvons négliger les forces élastique et d'amortissement entre 0 et t_1 . On peut écrire que la variation de la quantité de mouvement d'une masse m est :

$$m\Delta\dot{x} \approx \int_0^{t_1} F(t)dt \quad (19)$$

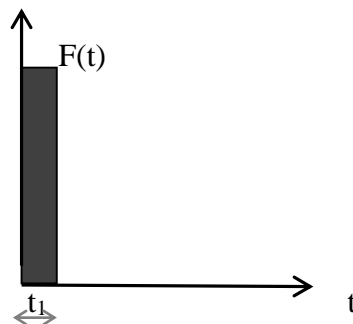


Fig. 8 Sollicitation impulsive à l'instant $t = 0$

Pour un système initialement au repos, on a :

$$m\dot{x}(t_1) \approx \int_0^{t_1} F(t)dt$$

Pour $t \geq t_1$, la réponse est une vibration libre, nous avons pour un système sous amorti :

$$x(\bar{t}) = \rho \cos(\omega_d \bar{t} - \theta) e^{-\xi \omega \bar{t}} \quad (20)$$

où $\bar{t} = t - t_1$

On note que :

$$x(\bar{t} = 0) = x(t = t_1) = 0 \text{ ce qui donne } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et : } \dot{x}(\bar{t}) = \rho(-\xi \omega \sin(\omega_d \bar{t}) + \omega_d \cos(\omega_d \bar{t})) e^{-\xi \omega \bar{t}}$$

On peut déduire que :

$$x(\bar{t}) \approx \frac{1}{m \omega_d} \left[\int_0^{t_1} F(t) dt \right] \sin(\omega_d \bar{t}) e^{-\xi \omega \bar{t}} \quad (21)$$

L'équation (21) constitue la réponse pour une impulsion à l'instant $t = 0$.

On peut constater que si l'amortissement est nul, alors l'équation (21) devient :

$$x(\bar{t}) \approx \frac{1}{m \omega} \left[\int_0^{t_1} F(t) dt \right] \sin(\omega \bar{t}) \quad (22)$$

II.4.2- Sollicitation quelconque - Intégrale de Duhamel

Considérons une charge dynamique quelconque (voir Fig.9). Cette fonction peut être considérée comme égale à la somme de charges impulsives $F(\tau)$ appliquée à l'instant $t = \tau$, et de durée $d\tau$. La réponse élémentaire s'écrit de la manière suivante :

$$dx(t) = \frac{1}{m\omega_d} [F(\tau)d\tau]e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin(\omega_d(t-\tau)) \quad (23)$$

La réponse à l'instant t est la somme des réponses aux impulsions produites au temps $t < \tau$, soit :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \left[\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin(\omega_d(t-\tau))d\tau \right] \quad (24)$$

Pour des conditions initiales non nulles, on aura :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \left[\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin(\omega_d(t-\tau))d\tau \right] + e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{x}(0)+x(0)\xi\omega}{\omega_d} \sin\omega_d t + x(0)\cos\omega_d t \right] \quad (25)$$

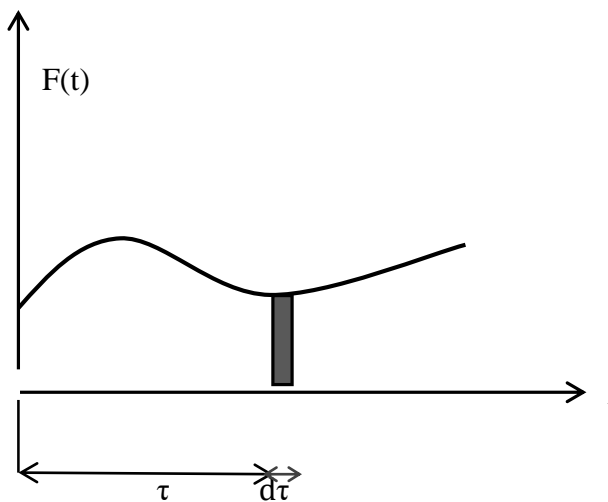


Fig. 9 Charge dynamique quelconque

Dans le cas où l'amortissement est nul, alors les équations (24) et (25) deviennent :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \left[\int_0^t F(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right] \quad (26)$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \left[\int_0^t F(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right] + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin\omega t + x(0) \cos\omega t \right] \quad (27)$$

Exercice d'application

En utilisant l'intégrale de Duhamel, calculer la réponse d'un système non amorti initialement au repos soumis à une force donnée par la figure (10).

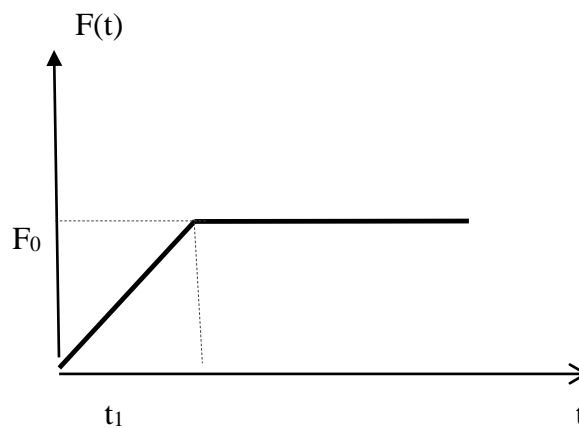


Fig. 10

Solution

L'équation différentielle du mouvement d'un système non amorti s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

$$\text{Chargement imposé : } F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{t_1} t & t \leq t_1 \\ F_0 & t \geq t_1 \end{cases}$$

Phase 1: $t \leq t_1$

On a : $m\ddot{x} + kx = \frac{F_0}{t_1}t$ avec $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

La solution est : $x(t) = \frac{1}{m\omega} \left[\int_0^t F(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right]$

où $F(\tau) = \frac{F_0}{t_1} \tau$

Il vient alors :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \frac{F_0}{t_1} \left[\int_0^t \tau \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right] = \frac{1}{m\omega^2} \frac{F_0}{t_1} \left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega} \right) = \frac{F_0}{kt_1} \left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega} \right)$$

Phase 2 : $t \geq t_1$

On a : $F(\tau) = F_0$

Et $x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos\omega(t - t_1)) + \left[\frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin\omega(t - t_1) + x(t_1) \cos\omega(t - t_1) \right]$

où $x(t_1) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{\sin\omega t_1}{\omega t_1} \right)$ et $\dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{kt_1} (1 - \cos\omega t_1)$

Ce qui implique que :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t_1} + \frac{1}{\omega t_1} \sin\omega(t - t_1) \right]$$

Introduction

Le nombre de degrés de liberté d'un système mécanique est le nombre de coordonnées qui évoluent indépendamment les unes des autres.

Pour un système possédant n degrés de liberté spatiale, donc il décrit par n coordonnées généralisées (q_1, q_2, \dots, q_n) . En d'autres termes, on se ramène à résoudre n équations différentielles du mouvement.

L'analyse modale permet via un changement de l'espace de description d'exprimer le comportement dynamique d'une structure complexe de manière beaucoup plus simple.

III.1- Exemple d'un système à deux degrés de liberté

Considérons le modèle simple d'un système à deux degrés de liberté (voir Fig.1)

Les équations différentielles du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases} \quad (1a)$$

On peut exprimer l'équation (1a) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1b)$$

On pose :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ x_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases} \quad (1c)$$

Où A_1 et A_2 sont des constantes inconnues.

Ce qui implique que :

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les deux fréquences propres du système sont données par :

$$\omega_1 = \sqrt{0.634 \frac{k}{m}}$$

$$\text{Et } \omega_2 = \sqrt{2.366 \frac{k}{m}}$$

Pour le premier mode, nous avons : $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = 0.731$

Pour le deuxième mode, nous avons : $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = -2.73$

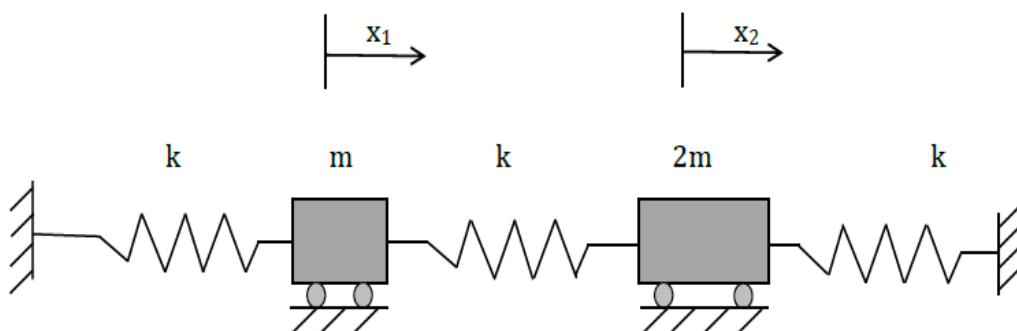


Fig. 1 Modèle simple d'un système à deux degrés de liberté.

III.2- Système à plusieurs degrés de liberté - cas non amorti

Nous supposons ici que le système n'est soumis à aucune force extérieure et que l'amortissement est nul.

L'équation du mouvement d'un système libre à n degrés de liberté s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

où $\mathbf{M}(n * n)$ et $\mathbf{K}(n * n)$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité, symétriques supposées définies positives.

Multipliant l'équation (2) par \mathbf{M}^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{I}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

On suppose que le mouvement est harmonique $\ddot{\mathbf{x}} = -\lambda\mathbf{x}$, $\lambda = \omega^2$.

Nous précisons que λ est une valeur propre, il vient alors :

$$\det(-\lambda\mathbf{I} + \mathbf{D}) = 0 \quad (4)$$

À chaque valeur propre λ_i , on calcule son vecteur propre \mathbf{X}_i correspondant :

$$(-\lambda\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{X}_i = \mathbf{0} \quad (5)$$

III.2.1- Orthogonalité des modes propres de vibration

En dynamique linéaire, Les modes propres d'une structure sont orthogonaux. En d'autres termes, les vecteurs modaux sont orthogonaux par rapport aux matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} , nous avons :

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{M} \mathbf{X}_j = m_i \delta_{ij} \quad (6a)$$

où m_i est appelée masse modale,

et

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{K} \mathbf{X}_j = k_i \delta_{ij} \quad (6b)$$

où k_i est appelée rigidité modale.

δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Démonstration

Le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\mathbf{K} \mathbf{X}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{X}_i \quad (7a)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{X}_j = \omega_j^2 \mathbf{M} \mathbf{X}_j \quad (7b)$$

\Rightarrow

$$\mathbf{X}_j' \mathbf{K} \mathbf{X}_i = \omega_i^2 \mathbf{X}_j' \mathbf{M} \mathbf{X}_i \quad (8a)$$

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{K} \mathbf{X}_j = \omega_j^2 \mathbf{X}_i' \mathbf{M} \mathbf{X}_j \quad (8b)$$

\Rightarrow

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{K} \mathbf{X}_j = \omega_i^2 \mathbf{X}_i' \mathbf{M} \mathbf{X}_j \quad (9a)$$

$$\mathbf{X}_j' \mathbf{K} \mathbf{X}_i = \omega_j^2 \mathbf{X}_j' \mathbf{M} \mathbf{X}_i \quad (9b)$$

À partir des équations (8) et (9), on peut déduire que :

$$\mathbf{X}_j' \mathbf{M} \mathbf{X}_i = 0, \quad i \neq j \quad (10a)$$

$$\mathbf{X}_j' \mathbf{K} \mathbf{X}_i = 0, \quad i \neq j \quad (10b)$$

Physiquement, les relations d'orthogonalité expriment le fait que le travail des forces d'inertie et élastiques du mode i lors d'un déplacement selon le mode j est nul ($i \neq j$).

III.2.2- Régime libre

Considérons la matrice modale \mathbf{P} et soient $\mathbf{P}' \mathbf{M} \mathbf{P} = \mathbf{M}_g$, $\mathbf{P}' \mathbf{K} \mathbf{P} = \mathbf{K}_g$.

Dans l'équation (2), on remplace $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, il vient alors :

$$\mathbf{P}' \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}' \mathbf{K} \mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

\Rightarrow

$$\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (11)$$

L'équation (11) représente n équations différentielles linéaires découplées :

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

La solution de l'équation (12) est celle d'un système à un degré de liberté :

$$y_i(t) = y_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

En utilisant les équations précédentes, il est possible de calculer le vecteur des déplacements $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$.

Note : Les vecteurs et les matrices sont représentés par un symbole gras, et \mathbf{A}' est la matrice transposée de la matrice \mathbf{A} .

III.3- Système avec amortissement

Les équations du mouvement s'écrivent dans le cas d'un système amorti :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (14)$$

où \mathbf{C} est la matrice d'amortissement.

Amortissement de Rayleigh

La matrice d'amortissement est exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur de la manière suivante :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}, \quad a, b \text{ constants.} \quad (15)$$

Il est évident que dans ce cas la propriété d'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres est préservée.

En substituant l'équation (15) dans (14), on obtient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (a\mathbf{M} + b\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (16)$$

Qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\Rightarrow \mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{aM}_g + \mathbf{bK}_g) \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (17)$$

L'équation (17) représente n équations différentielles découplées :

$$\ddot{y}_i + (a + b\omega_i^2) \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

III.4- Système forcé

L'équation différentielle se met sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (19)$$

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ est le vecteur des forces.

On suppose que $\mathbf{C} = \mathbf{aM} + \mathbf{bK}$.

En tenant compte des matrices $\mathbf{M}_g, \mathbf{K}_g$ et du vecteur $\mathbf{y}(t)$, on peut écrire que :

$$\Rightarrow \mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{aM}_g + \mathbf{bK}_g) \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g \mathbf{y} = \mathbf{F}_g \quad (20)$$

où $\mathbf{F}_g = \mathbf{P}'\mathbf{F}$.

Soit : $\mathbf{f} = \mathbf{M}_g^{-1}\mathbf{F}_g$.

L'équation modale découplée est de la forme suivante :

$$\ddot{y}_i + (a + b\omega_i^2) \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

La solution complète est celle d'un système à un degré de liberté de déplacement $y_i(t)$. (cf. Chapitre II).

L'analyse modale est basée sur la propriété d'orthogonalité des modes propres permettant de découpler les équations différentielles du mouvement. La réponse totale peut être obtenue avec une précision suffisante en considérant un nombre de modes propres inférieur au nombre total de modes.

Exercice d'application

Soit une structure mécanique avec les caractéristiques suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 9k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

$$\text{où : } \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } F_0 = \text{cte}$$

Déterminer les équations différentielles découplées du système.

Solution

Le calcul des fréquences et modes propres de vibration donne :

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{3m}, \quad \omega_2^2 = \frac{4k}{3m}.$$

Pour $\omega_1^2 = \frac{2k}{3m}$, on a : $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\omega_2^2 = \frac{4k}{3m}$, on a : $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g\mathbf{y} = \mathbf{F}_g$$

On trouve que :

$$\mathbf{M}_g = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_g = \begin{pmatrix} 4k/3 & 0 \\ 0 & 8k/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{2F_0}{3m} \\ \frac{F_0}{3m} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\ddot{y}_1 + \frac{2k}{3m}y_1 = \frac{2F_0}{3m},$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{4k}{3m}y_2 = \frac{F_0}{3m}$$

Introduction

La formulation mathématique de l'équation d'équilibre dynamique d'un système continu possédant un nombre infini de degrés de liberté conduit à des équations différentielles aux dérivées partielles. Les variables indépendantes sont le temps et la position du point.

Le milieu continu est supposé linéaire élastique, homogène et isotrope. Notons que la réponse propre de la structure est indépendante du chargement appliqué.

Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement à l'étude des barres et poutres, c'est-à-dire, des problèmes unidimensionnels pour lesquelles les coordonnées se réduisent à la donnée de la section repérée par son abscisse curviligne x . Le champ de déplacement est donc : $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, en d'autres termes, on utilise les hypothèses de la résistance des matériaux.

Les hypothèses de l'établissement des équations de l'équilibre dynamique sont:

- Le système est constitué d'une poutre droite,
- Les sections droites des poutres restent droites au cours de la déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli),
- Les transformations restent petites (Hypothèse des petites perturbations).

Nous nous intéresserons ici aux vibrations libres des poutres droites, c'est à dire la réponse vibratoire caractérisée par les modes et pulsation propres.

Dans tout ce qui suit, on suppose que la section de la poutre est constante et que les modules d'élasticité du matériau (constantes de Lamé) sont constantes.

IV.1- Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

Le principe de Hamilton appliqué à des poutres droites est donnée par :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) dt = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ C. A. } (0); \text{ C. I. } (0) \quad (1)$$

\mathcal{L} : Le Lagrangien du système.

Les composantes du champ de déplacement sont les deux déplacements $u(x), v(x)$ et une rotation $v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ (voir Fig.1).

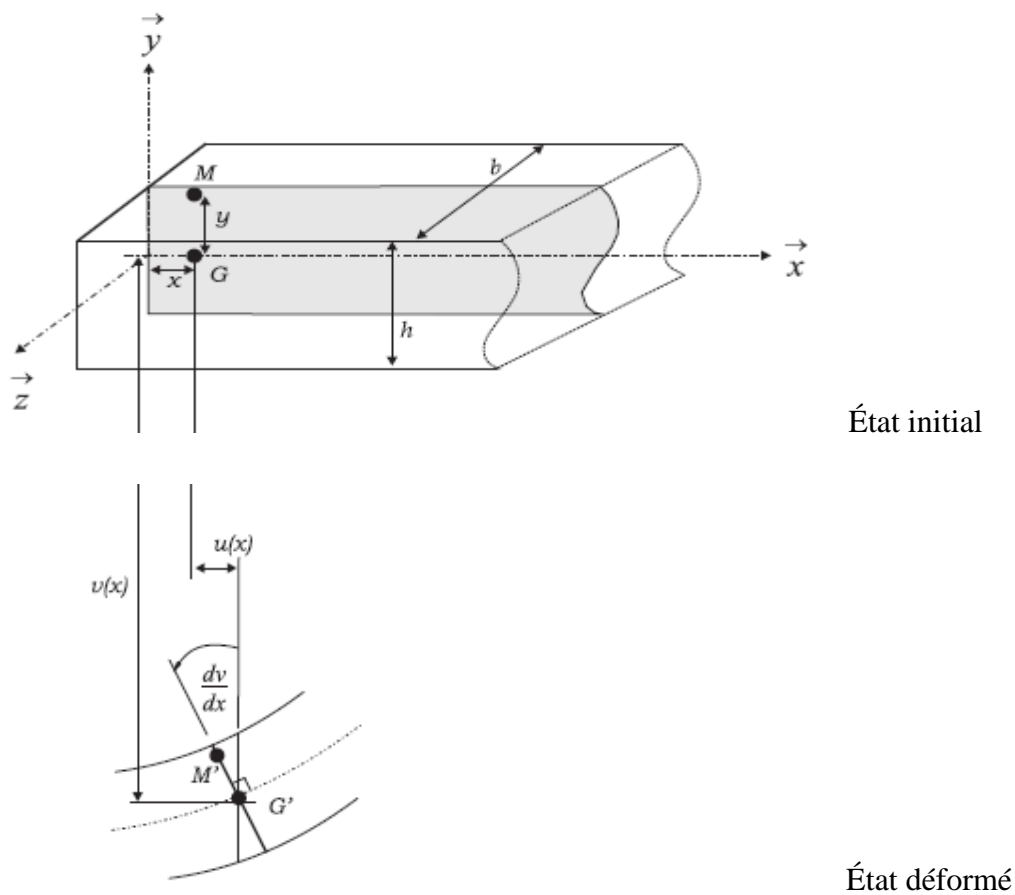


Fig. 1 : Poutre droite à plan moyenne, section symétrique.

Soit ρ la masse linéique de la poutre et S l'aire de la section de la poutre. Les équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite à plan moyen chargée dans ce plan sont données par :

Condition cinématiques et conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x_i, t) = u_i^d(t), v(x_i, t) = v_i^d(t), \phi(x_i, t) = \phi_i^d(t), & \forall t \\ u(x, t_j) = u^{(j)}, v(x, t_j) = v^{(j)}, \phi(x, t_j) = \phi^{(j)} & \forall x \\ \dot{u}(x, t_j) = \dot{u}^{(j)}, \dot{v}(x, t_j) = \dot{v}^{(j)}, \dot{\phi}(x, t_j) = \dot{\phi}^{(j)} & \forall x \end{cases} \quad (2)$$

Équilibre intérieur

$$\begin{cases} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + p_x(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + p_y(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + T(x,t) + c_z(x,t) = \rho I \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3)$$

Équilibre au bord

$$N(x_i, t) = N^i(t), T(x_i, t) = T^i(t), M(x_i, t) = M^i(t) \quad (4)$$

Loi de comportement

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ij} \quad (5a)$$

et

$$\begin{cases} N(x, t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(x, t) ds \\ T(x, t) = \int_{S(x)} \sigma_{xy}(x, t) ds \\ M(x, t) = \int_{S(x)} -y\sigma_{xx}(x, t) ds \end{cases} \quad (5b)$$

où :

$N(x, t)$, $T(x, t)$ sont les efforts normal et tranchant et $M(x, t)$ est le moment de flexion.

λ et μ sont les constantes de Lamé et I est le moment quadratique.

$\mathbf{p}(x, t)$, $\mathbf{c}(x, t)$ sont respectivement les forces linéiques et les couples réparties.

IV.2- Vibrations des barres et poutres

IV.2.1- Vibrations longitudinales des barres

IV.2.1.1- Équation d'équilibre dynamique

L'équation d'équilibre dynamique axial d'une barre s'écrit :

$$-\rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + ES \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) + p_x(x, t) = 0 \quad (6)$$

Les conditions aux limites sont :

$$R_i(t) = ES \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x_i}, \text{ ou } u(x_i, t) = u_i^d(t), \quad \forall t \quad (7)$$

Les conditions initiales sont :

$$u(x, t_j) = u(x)^{(j)} \text{ et } \dot{u}(x, t_j) = \dot{u}(x)^{(j)}, \quad \forall x \quad (8)$$

IV.2.1.2- Modes propres

Le calcul des fréquences et modes propres permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, ce calcul est utilisé dans le domaine de l'analyse modale. La base modale est infinie dans le cas des milieux continus.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

Les modes propres de vibration sont les solutions périodiques de l'équation (9). On utilise la technique de séparation des variables pour résoudre l'équation (9).

$$u(x, t) = \psi(x)\eta(t) \quad (10)$$

En substituant l'équation (10) dans (9), on obtient :

$$\psi''(x) + \lambda^2 \psi(x) = 0$$

et

$$\ddot{\eta}(t) + \omega^2 \eta(t) = 0$$

$$\text{où : } \omega = \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

La solution du problème conduit à des solutions purement harmoniques en espace et en temps:

$$u(x, t) = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x)(B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \quad (11)$$

où λ et ω sont respectivement les pulsations en espace et en temps. A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des constantes d'intégration inconnues.

IV.2.2- Vibrations des poutres en flexion simple

IV.2.2.1- Équation d'équilibre dynamique

En vertu du principe de Hamilton, on en déduit les équations de l'équilibre intérieur et de l'équilibre au bord. Soit :

$$\text{A L'intérieur} \quad \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = p_y(x,t) - \frac{\partial C_z(x,t)}{\partial x} \quad (12)$$

On obtient une équation différentielle du quatrième ordre.

$$\text{En } x = 0, x = l \forall t \quad \begin{cases} T_i(t) = EI \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x_i} & \text{ou } v(x_i, t) = v_i^d(t) \\ M_i(t) = EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x_i} & \text{ou } v'(x_i) = v_i'^d(t) \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{à } t = 0, \forall x \quad \begin{cases} v(x, 0) = v(x)^{(0)} & \text{et } \dot{v}(x, 0) = \dot{v}(x)^{(0)} \\ v'(x, 0) = v'(x)^{(0)} & \text{et } \dot{v}'(x, 0) = \dot{v}'(x)^{(0)} \end{cases} \quad (14)$$

IV.2.2.2- Modes propres

L'équation d'équilibre est déduite de l'équation (13) de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} \quad (15)$$

La solution générale s'écrit :

$$v(x, t) = \psi(x)\eta(t) \quad (16)$$

ce qui donne :

$$v(x, t) = (B_1 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x + B_3 \sinh \lambda x + B_4 \cosh \lambda x) A \cos(\omega t - \varphi) \quad (17)$$

$$\text{où : } \frac{EI}{\rho S} \lambda^4 = \omega^2$$

IV.3- Orthogonalité des modes

Pour deux fréquences différentes, les modes propres vérifient la condition d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^l \varphi_m(x) \varphi_n(x) \bar{m}(x) dx = 0 \quad (18)$$

où : m, n sont des entiers, l est la longueur de la poutre et \bar{m} est la masse par unité de longueur.

Cette relation est équivalente à la condition d'orthogonalité des modes de vibration pour un système discret à plusieurs degrés de liberté.

Exercice d'application

Considérons une poutre en extension, constitué d'un matériau homogène (voir Fig. 2).

Déterminer les fréquences propres de vibrations de la poutre.

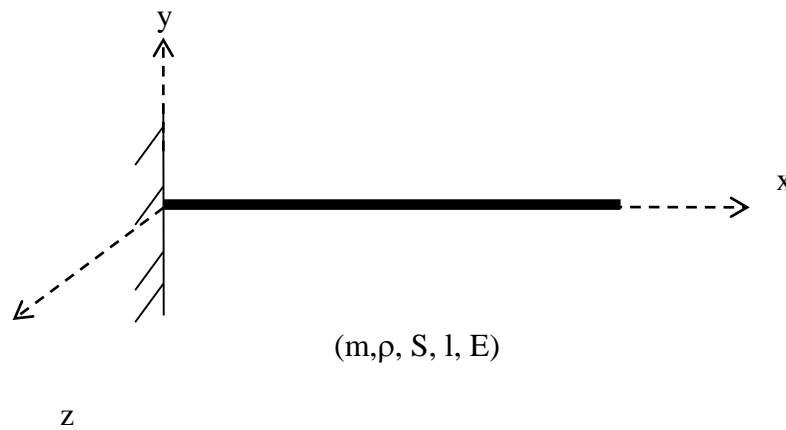


Fig. 2 : Poutre encastree-libre.

Solution

Le champ de déplacement s'écrit :

$$u(x, t) = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x)(B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$N(l, t) = 0 \Rightarrow A_2 \cos \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \Leftrightarrow \lambda_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2l}, k \in \mathbb{N}^{*+}$$

La pulsation $\omega_k = \lambda_k \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ alors $\omega_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $k \in \mathbb{N}^{*+}$.

On suppose que la vitesse initiale est nulle, alors la solution du problème s'exprime :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \left((2k - 1) \frac{\pi}{2l} x \right) \cos \left(\sqrt{E/\rho} (2k - 1) \frac{\pi}{2l} t \right)$$

Références bibliographiques

- Theory of vibration with applications. William T Thomson: 2nd edition, first published by George Allen and Unwin, London 1983. ISBN 0-04-620012-6, xvi+493pages.
- Dynamique des structures : Applications aux ouvrages de génie civil, Patrick Paultre. Lavoisier, 2005. ISBN 2-7462-0893-8.
- Dynamique des Solides et des Structures. Sylvain Drapier : 5ème édition, 2016.
- Structural dynamics: Theory and computation. Mario Paz & Young Hoon Kim, Sixth Edition, Springer 2019. ISBN 978-3-319-94742-6.
- Dynamique des structures et des ouvrages. Alain Pecker, 2006.
- Dynamics of structures, Ray W. Clough and Joseph Penzien: Third edition, Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704. USA.
- Dynamique des structures, Professeur I. Smith and Dr. P. Lestuzzi : École polytechnique fédérale de Lausanne. Semestre d'automne 2013/2014.
- Dynamic analysis of structures, John T. Katsikadelis, Academic Press. © 2020 Elsevier Inc. ISBN 978-0-12-818643-5.
- Dynamics of structures: Theory and application to Earthquake Engineering. Anil K. Chopra. © 1995 by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Shuster Company Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- Calcul différentiel et intégral. N. Piskounov. Tome II. 9^{ème} édition, Edition Mir • Moscou. Traduit du russe par G. Der-Megerditchian (ch. I-X) et E. Gloukhian (ch. XI-XII).