Université A.Mira Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

REZOUALI Karim

MÉCANIQUE DU POINT

Cours et Exercices Corrigés

Année Universitaire 2021/2022

Table des matières

Table des figures

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION

Ce cours de mécanique est conçu pour les étudiants de tronc commun des sciences de la matière (SM). Son contenu correspond minutieusement au programme officiel du module de mécanique enseigné au niveau de ce socle commun.

Notre objectif à travers cette contribution est de mettre à la disposition de l'étudiant de première année SM un document lui servant de point de départ pour étendre et approfondir ses connaissances dans cette discipline scientifique. En outre, il lui indique les repères et lui fourni les ingrédients essentiels de la mécanique.

Ce polycopié de cours est composé de 4 chapitres. Le premier chapitre est dédié à l'analyse vectorielle, à l'analyse dimensionnelle et aux calculs d'erreurs. Le chapitre 2 se rapporte à la cinématique d'un point matériel alors que le chapitre 3 est consacré à la dynamique d'un point matériel. Dans le 4$^{\text{ème}}$ chapitre, nous avons abordé les notions du travail et d'énergie.

Ce cours contient une collection de plusieurs exemples, problèmes et exercices. Chaque chapitre contient plusieurs exemples résolus dont chacun est conçu pour illustrer un concept spécifique se rapportant à une section particulière du chapitre. A la fin de chaque chapitre nous avons proposé un certain nombre d'exercices résolus. Nous avons aussi proposé un grand nombre d'exercices non résolus dans le but de servir de travail maison pour les étudiants. Le tout est couronné par une bibliographie riche et récente permettant à l'étudiant d'élargir et d'approfondir ces connaissances en mécanique newtonienne.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES

1.1 Introduction

La physique est une science expérimentale qui a pour but l'étude des phénomènes naturels et leurs évolutions. Elle établit des théories permettant de les modéliser et par conséquent de les prévoir. Il existe trois ensembles de théories physiques établies, chacune est valide dans le domaine d'applications qui lui est propre : la physique classique, la physique quantique et la relativité générale.

1.1.1 Physique classique

La physique classique est l'ensemble des théories physiques validées jusqu'à la fin du XIX $^{\text{ème}}$ siècle, à savoir :

- **Mécanique newtonienne**
- **Thermodynamique**
- **Théorie du champ électromagnétique**

Elle repose sur des définitions anciènes du temps, d'espace, de matière et d'énergie. Elle peine toutefois à expliquer certains phénomènes.

1.1.2 Physique quantique

Son domaine d'application est le monde des particules et des champs de forces (infiniment petit). Elle indroduit de nouvelles définitions de la matière et de l'énergie.

1.1.3 Relativité générale

Elle s'intéresse au monde macroscopique (infiniment grand). Elle intronduit de nouvelles définitions de l'espace et du temps.

Nous pouvons classer les disciplines de la physique en fonction des phénomènes qu'elles étudient.

- **La mécanique :** elle étudie le mouvement des corps.
- **L'optique :** elle s'intéresse à la lumière et à ses propriétés.
- **Le magnétisme :** champs magnétiques et les forces qu'ils engendrent.
- **L'astrophysique :** elle concerne l'étude des objets de l'univers.

1.2 Mécanique newtonienne

La mécanique newtonienne [1] est une branche de la physique qui décrit le mouvement des objets macroscopiques lorsque leur vitesse est faible par rapport à celle de la lumière. Elle est classiquement découpée en domaines en fonction des propriétés étudiées ou selon l'objet étudié.

1.2.1 Classification selon les propriétés étudiées

- **Cinématique :** elle permet d'étudier les relations entre les paramètres du mouvement (position, vitesse, accélération ...).

- **Dynamique :** elle permet de prédire l'évolution des paramètres du mouvement en connaissant les causes du mouvement.

- Interaction de contact : frottements et poussée,

- Interaction à distance; Interaction (attraction) gravitationnelle et interactions électromagnétiques.

1.2.2 Classification selon l'objet étudié

- **Mécanique du point** : elle étudie le mouvement des point matériels [2].

- **Mécanique du solide** : elle s'intéresse aux objets (indéformables et déformables) que l'on ne peut réduire en un point matériel.

- **Mécanique des milieux continus** : elle s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides.

On distingue ainsi la mécanique du point de la mécanique du solide

1. Elle est qualifiée de mécanique classique depuis les travaux d'Einstein
2. Un point matériel est un objet de masse m mais n'ayant pas de volume .i.e., la masse est ramassée ou concentérée en un point (centre de masse). Les dimensions du corps sont très petites devant la distance parcourue

1.3 Calcul vectoriel

On distingue deux types d'objets physiques :

1. Objets physiques scalaires

2. Objets physiques vectoriels

Un scalaire est un nombre positif, négatif ou nul. On utilise un scalaire pour représenter des quantités physiques comme le temps, la température, la masse, l'énergie .... D'autres part, il existe des objets physiques vectoriels comme la vitesse, l'accélération , la quantité de mouvement .... Ces quantités sont représentées par des vecteurs.

1.3.1 Définition d'un vecteur

Un vecteur est un segment d'une droite orienté, ayant pour extrêmités un point de départ et un point d'arrivée.

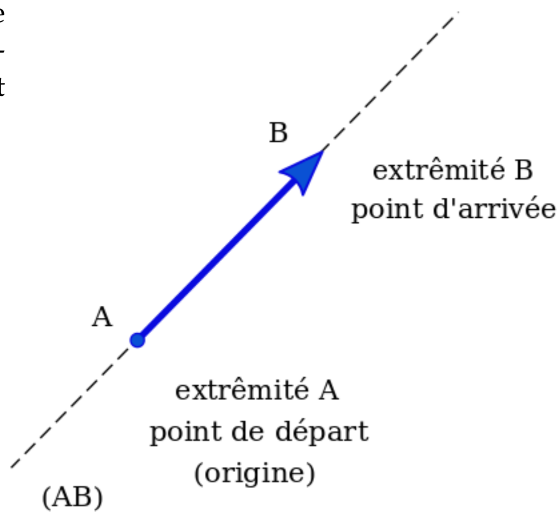

FIGURE 1.1 – Schéma illustratif d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soient A et B deux point distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède trois éléments caractéristiques :

1. Une direction : droite (AB)

2. Un sens : de A vers B ou de B vers A indiqué par une flèche

3. Une norme : longueur du segment [AB]. Elle est notée $|\overrightarrow{AB}|$ ou $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ou simplement AB.

$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \longrightarrow$ les deux extrêmites sont confondues et le vecteur est nul. (A,A) sont équipolents entre eux (norme = 0).

(i) Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1 ($|\overrightarrow{AB}|$ =1).
$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ou $\vec{A}$ est un vecteur quelconque.

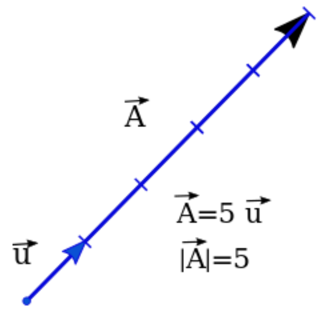

FIGURE 1.2 – Vecteur unitaire

(ii) L'opposé d'un vecteur

L'opposé d'un vecteur $\vec{V}$ est $-\vec{V}$. Il possède la même norme, la même direction mais de sens opposé.

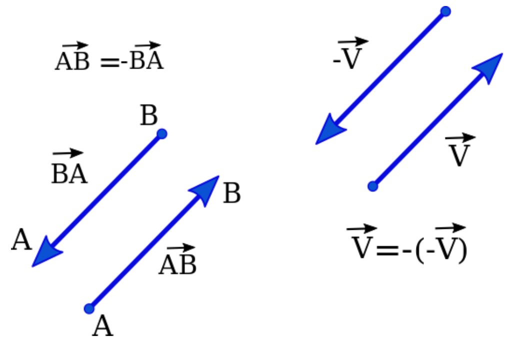

FIGURE 1.3 – L'opposé d'un vecteur

(iii) L'emplacement d'un vecteur

Un vecteur n'a pas d'emplacement. On peut faire glisser la flèche à volonté tant qu'on ne change pas sa longueur, sa direction et son sens. Une deplacement de 4 Km plein nord d'El-Kseur est représenté par le même vecteur qu'un deplacement de 4 Km plein nord de Washington(en negligeant, bien sûr, la corbure de la terre)

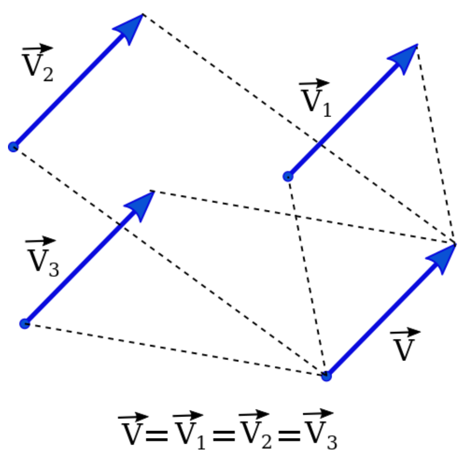

FIGURE 1.4 – Emplacement d'un vecteur

1.3.2 Opérations sur les vecteurs

Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel.

(i) Addition de vecteurs

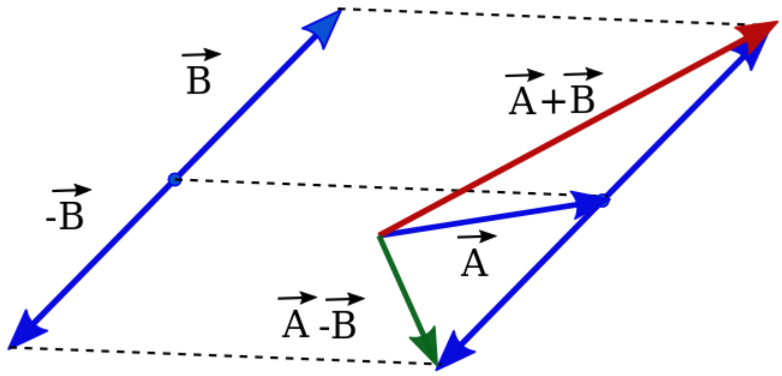

FIGURE 1.5 – Addition de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs. La somme $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ s'obtient en deplaçant $\overrightarrow{B}$ parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son origine coincide avec l'extrémité de $\overrightarrow{A}$. Ensuite, joindre l'origine de $\overrightarrow{A}$ avec l'extrémité de $\overrightarrow{B}$.

Règle 1 : pour soustraire un vecteur, ajouter son opposé.

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=\overrightarrow{A}+(-\overrightarrow{B}). \tag{1.1}$$

Commutativité

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A} \tag{1.2}$$

Associativité

$$(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}+(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) \tag{1.3}$$

(ii) Multiplication par un scalaire

$$a(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})=a\overrightarrow{A}+a\overrightarrow{B} \tag{1.4}$$

Il est à noter que la multiplication par un scalaire est distributive.

(iii) Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est défini par

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta \tag{1.5}$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.
Il est à noter que le résultat de l'opération produit scalaire est un scalaire.

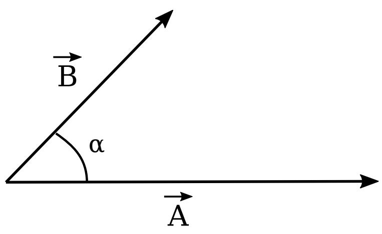

FIGURE 1.6 – Produit scalaire de deux vecteurs

Quelques propriétés du produit scalaire

Commutativité

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{A} \tag{1.6}$$

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos(-\theta) = |\overrightarrow{B}||\overrightarrow{A}|\cos(-\theta) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{A} \tag{1.7}$$

Distributivité

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}.\overrightarrow{C} \tag{1.8}$$

Interprétation géométrique du produit scalaire

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}|\underbrace{|\overrightarrow{B}|\cos\theta} = |\overrightarrow{B}|\underbrace{|\overrightarrow{A}|\cos\theta} \tag{1.9}$$

$|\overrightarrow{A}|\cos\theta$ est la projection de $\overrightarrow{A}$ sur $\overrightarrow{B}$
$|\overrightarrow{B}|\cos\theta$ est la projection de $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$ est le produit de $|\overrightarrow{A}|$ par la projection de $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{A}$ ou le produit de $|\overrightarrow{B}|$ par la projection de $\overrightarrow{A}$ sur $\overrightarrow{B}$

$$\text{Si } \theta = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \Longrightarrow \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}| \tag{1.10}$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \Longrightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0 \tag{1.11}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\ cos\theta = |\vec{A}|^2 \tag{1.12}$$

(iii) Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ noté $\vec{A} \times \vec{B}$ ou $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est défini par

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\ \hat{n} \tag{1.13}$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et $\hat{n}$ est un vecteur unitaire porté par $\vec{A} \times \vec{B}$.

Donc on peut écrire

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|\ \hat{n} \tag{1.14}$$

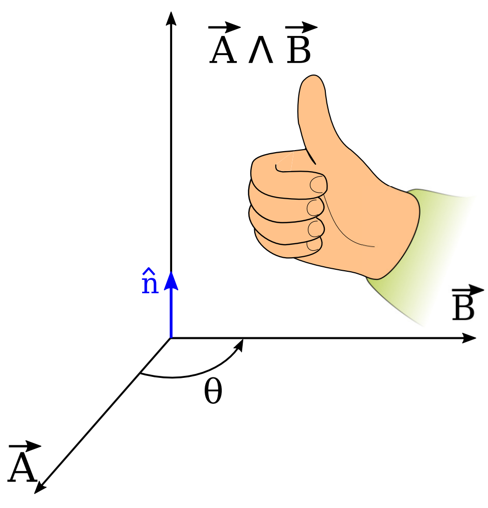

FIGURE 1.7 – Produit vectoriel de deux vecteurs

Remarque

(1) Le résultat de l'opération produit vectoriel est un vecteur.

(2) $\vec{A} \times \vec{B}$ perpendiculaire à la fois à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$.

$$\begin{cases} (\vec{A} \times \vec{B}) \perp \vec{A} \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \perp \vec{B} \end{cases}$$

(3) Le sens de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ est donné par la règle de la main droite ou la règle du tourne-vis (voir Fig 1.7).

(4) $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} (\theta = 0 \text{ ou } \theta = 180^o)$ $\overrightarrow{A} \Longrightarrow \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$

(5) $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$

Quelques propriétés du produit vectoriel

Anticommutativité

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} \tag{1.15}$$

Distributivité

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \pm \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \pm (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}) \tag{1.16}$$

Interprétation géométrique du produit vectoriel

$|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|$ représente l'aire (surface) du parallélogramme (voir figure 1.8) généré par $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

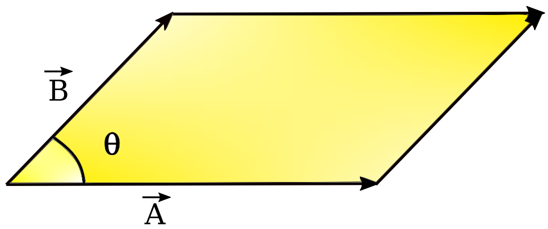

FIGURE 1.8 – Surface du parallélogramme formée par deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

1.3.3 Composantes d'un vecteur

Il est plus pratique d'utiliser les coordonnées cartésiennes x, y, z et travailler avec les composantes d'un vecteur. Soit $\hat{x}$, $\hat{y}$, et $\hat{z}$ trois vecteurs parallèles aux axes x, y, et z, respectivement. Le point O est le point d'intersection de ces trois axes. Les vecteurs $\hat{x}$, $\hat{y}$, et $\hat{z}$ forment une base orthonormée.

Le vecteur $\overrightarrow{A}$ représenté dans la figure 1.9 s'écrit :

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{OA} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \tag{1.17}$$

Les vecteurs $\hat{x}$, $\hat{y}$, et $\hat{z}$ sont mutuellement orthogonaux

$$\hat{x}.\hat{y} = \hat{x}.\hat{z} = \hat{y}.\hat{z} = 0 \tag{1.18}$$

i.e,
$$\hat{x} \perp \hat{y}, \quad \hat{x} \perp \hat{z} \text{ et } \hat{y} \perp \hat{z} \tag{1.19}$$

$$\hat{x}.\hat{x} = \hat{y}.\hat{y} = \hat{z}.\hat{z} = 1 \tag{1.20}$$

i.e,
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 \tag{1.21}$$

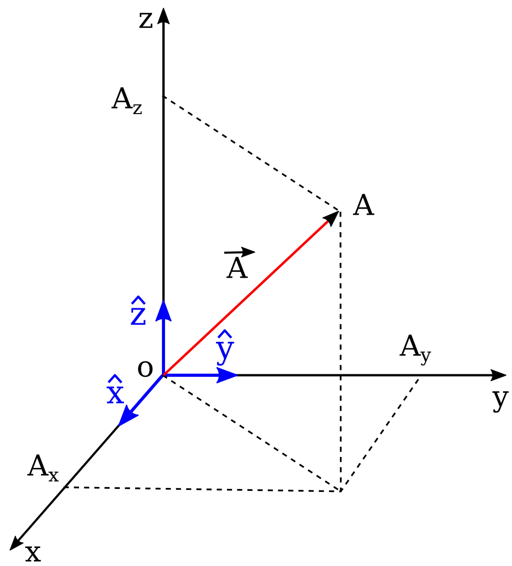

FIGURE 1.9 – Composantes d'un vecteur

De manière similaire,

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \overrightarrow{0} \tag{1.22}$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{k} \tag{1.23}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y} \tag{1.24}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x} \tag{1.25}$$

Exemple 1.1

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs définis comme suit :

$\overrightarrow{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$
$\overrightarrow{B} = \hat{x} + 4\hat{y} + 3\hat{z}$

Représenter ces vecteurs dans un repère orthonormé (O ; $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$).

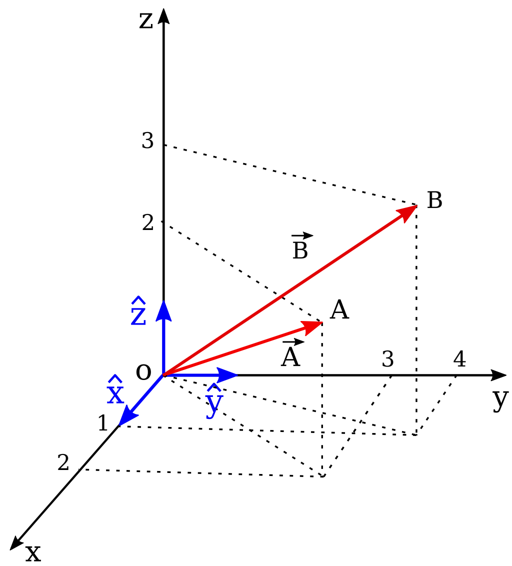

FIGURE 1.10 – Représentations de vecteurs

Différence de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs définis comme suit : $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{OA} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{OB} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$. Représenter le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère orthonormé (O ; $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$).

On a :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$
$=(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$- $(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})$
$=(B_x - A_x)\hat{x} + (B_y - A_y)\hat{y} + (B_z - A_z)\hat{z}$

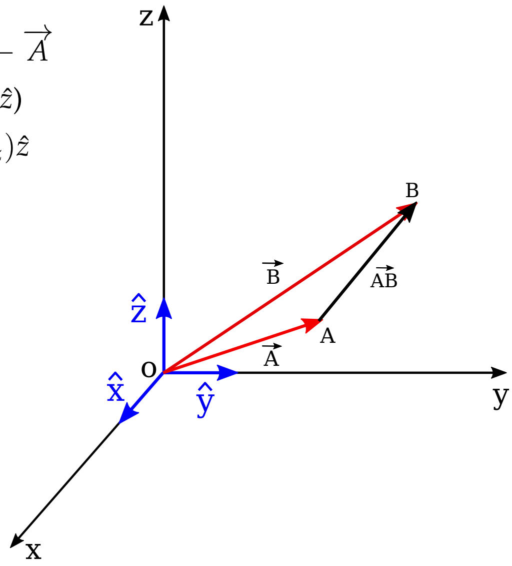

FIGURE 1.11 – Représentation de la différence de deux vecteurs

---

Exemple 1.2

$$\overrightarrow{A} = 2\hat{x} + 4\hat{y} + \hat{z}$$
$$\overrightarrow{B} = 4\hat{x} + 0\hat{y} + 3\hat{z}$$
$$\overrightarrow{C} = 3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$$

Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Solution

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A-} = (4-2)\hat{x} + (0-4)\hat{y} + (3-1)\hat{z} = = 2\hat{x} - 4\hat{y} + 2\hat{z}$$
$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (2-4)\hat{x} + (4-0)\hat{y} + (1-3)\hat{z} = -2\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z} = -(2\hat{x} - 4\hat{y} + 2\hat{z}) = -\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A-} = (3-2)\hat{x} + (2-4)\hat{y} + (1-1)\hat{z} = = \hat{x} - 2\hat{y}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = (3-4)\hat{x} + (2-0)\hat{y} + (1-3)\hat{z} = -\hat{x} + 2\hat{y} - 2\hat{z}$$

Règle 1 : *Pour ajouter des vecteurs, ajoutez des composantes semblables.*

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z} \quad (1.26)$$

Exemple 1.3

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ tels que :

$$\overrightarrow{A} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$$
$$\overrightarrow{B} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 1\hat{z}$$

Calculer $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$.

Solution

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (1+5)\hat{x} + (2+3)\hat{y} + (3+1)\hat{z} = 6\hat{x} + 5\hat{y} + 4\hat{z}$$

Règle 2 : *Pour multiplier par un scalaire, multipliez chaque composante.*

$$a\overrightarrow{A} = a(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) = aA_x\hat{x} + aA_y\hat{y} + aA_z\hat{z} \tag{1.27}$$

Exemple 1.4

Calculer le vecteur $4\overrightarrow{A}$ tel que :

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \frac{3}{4}\hat{z}$$

Solution

$$4\overrightarrow{A} = 4(\tfrac{1}{2}\hat{x} + \tfrac{1}{4}\hat{y} + \tfrac{3}{4}\hat{z}) = 2\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z}$$

Règle 3 : *Pour calculer le produit scalaire, il faut multiplier les composantes semblables, puis les additionner.*

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) = A_xB_x\hat{x}\hat{x} + A_xB_y\hat{x}\hat{y} + A_xB_z\hat{x}\hat{z} + A_yB_x\hat{y}\hat{x} + A_yB_y\hat{y}\hat{y} + A_yB_z\hat{y}\hat{z} + A_zB_x\hat{z}\hat{x} + A_zB_y\hat{z}\hat{y} + A_zB_z\hat{z}\hat{z} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

donc

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.28}$$

Exemple 1.5

Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$$
$$\overrightarrow{B} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 1\hat{z}$$

Solution

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = (1\times 5) + (2\times 3) + (3\times 1) = 5 + 6 + 3 = 14$$

En particulier, nous pouvons utiliser l'équation 1.28 pour déterminer l'expression de la norme d'un vecteur en fonction de ses composantes.

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{A} = |\overrightarrow{A}|^2 = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{1.29}$$

donc

$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.30}$$

Exemple 1.6

Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que :

$$\overrightarrow{A} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$$

Solution

$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Nous pouvons aussi utiliser l'équation 1.28 pour déterminer l'angle entre deux vecteurs.

En effet, à partir de l'équation 1.28, on a

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}}{AB} \tag{1.31}$$

À partir des équations 1.28 et 1.30, l'équation 1.31 s'écrira comme suit :

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \tag{1.32}$$

Exemple 1.7

Calculer l'angle entre les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A} = 3\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y} + 2\hat{z}\,; \qquad \overrightarrow{B} = 4\hat{x} + 2\hat{y} + \sqrt{5}\hat{z}$$

Solution

$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$|\overrightarrow{B}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$$

donc

$$\cos\theta = \frac{3\times 4 + 2\times\sqrt{3} + 2\times\sqrt{5}}{4\times 5} =\simeq 0.996$$

d' où

$$\theta = \cos^{-1}(0.996) = 4.57^{o}$$

Exemple 1.8

Trouver l'angle entre les diagonales des faces d'un cube de coté $a = 1$.

Solution

Les diagonales des faces montrées à la figure 1.12 sont :

$$\overrightarrow{A} = 1\hat{x} + 0\hat{y} + 1\hat{z}\,; \qquad \overrightarrow{B} = 0\hat{x} + 1\hat{y} + 1\hat{z}$$

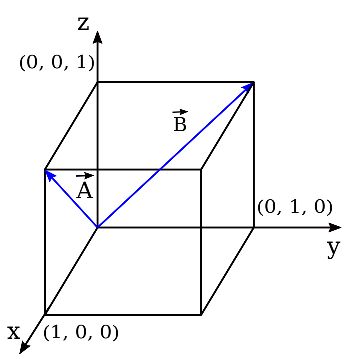

FIGURE 1.12 – Angle entre les diagonales des faces d'un cube

Nous avons, en terme de composantes

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$$

D'un autre coté, sous la forme réduite

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = A.B\cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta$$

Ainsi,

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = 60^o$$

Règle 4 : *Pour calculer le produit vectoriel, former un déterminant dont la première ligne est* $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, *la seconde ligne est constituée des composantes de* $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, *et la dernière est formée par les composantes de* $\overrightarrow{\mathbf{B}}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}} \tag{1.33}$$

Exemple 1.9

Calculer le produit vectoriel des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A} = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 1\hat{z}; \qquad \overrightarrow{B} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 6\hat{z}$$

Solution

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (5 \times 6 - 3 \times 1)\hat{\mathbf{x}} - (3 \times 6 - 4 \times 1)\hat{\mathbf{y}} + (3 \times 3 - 4 \times 5)\hat{\mathbf{z}}$$

$$= 27\hat{\mathbf{x}} - 14\hat{\mathbf{y}} + 11\hat{\mathbf{z}}$$

1.3.4 Vecteurs collinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont collinéaires $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.
donc

$$\begin{cases} A_y B_z - A_z B_y = 0 \\ A_z B_x - A_x Bz = 0 \\ A_x B_y - A_y B_x = 0 \end{cases} \tag{1.34}$$

Exemple 1.10
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont collinéaires.

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{5}{3}\hat{y} + 0\hat{z}\,; \qquad \overrightarrow{B} = 3\hat{x} + 10\hat{y} + 0\hat{z}$$

Solution

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{3} & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = (\frac{5}{3} \times 0 - 10 \times 0)\hat{\mathbf{x}} - (\frac{1}{2} \times 0 - 3 \times 0)\hat{\mathbf{y}} + (\frac{1}{2} \times 10 - 3 \times \frac{5}{3})\hat{\mathbf{z}}$$

$$= 0\,\hat{\mathbf{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} + 0\,\hat{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

Exemple 1.11
Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs tels que

$$\overrightarrow{A} = 1\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}\,; \qquad \overrightarrow{B} = 2\hat{x} + 4\hat{y} + \alpha\hat{z}$$

Déterminer la valeur de α pour que $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ soient collinéaires.

Solution

$\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont collinéaires $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = (2 \times \alpha - 4 \times 3)\hat{\mathbf{x}} - (1 \times \alpha - 2 \times 3)\hat{\mathbf{y}} + (1 \times 4 - 2 \times 2)\hat{\mathbf{z}}$$

$$= 0\,\hat{\mathbf{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} + 0\,\hat{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\,\alpha - 12 = 0 \\ \alpha - 6 = 0 \\ 4 - 4 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \alpha = 6$$

1.3.5 Produit triple

Étant donné que le produit vectoriel de deux vecteurs est lui-même un vecteur, il est donc possible de l'utiliser avec un troisième vecteur pour former un produit scalaire (produit mixte) ou un produit vectoriel (triple produit vectoriel).

(i) Produit mixte

Soient $\overrightarrow{A}$, et $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ trois vecteurs. Le produit mixte de ces trois vecteurs est

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) \tag{1.35}$$

Géométriquement, $|\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C})|$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$.

$S = |\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|$ est l'aire de la base.

$h = |A \cos\theta|$ est la hauteur.

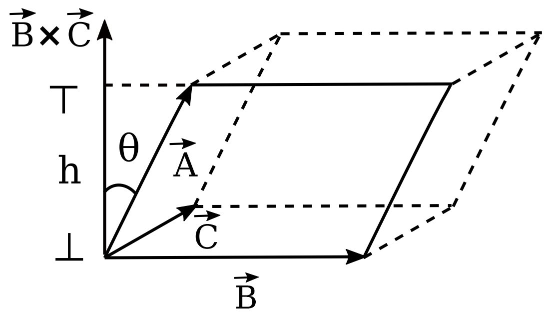

FIGURE 1.13 – Produit triple

Le calcul en composantes donne

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}.(\overrightarrow{\mathbf{B}} \times \overrightarrow{\mathbf{C}}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = A_x(B_yC_z - C_yB_z) - A_y(B_xC_z - C_xB_z) + A_z(B_xC_y - C_xB_y) \tag{1.36}$$

Propriétés importantes

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{C}.(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}.(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}) \tag{1.37}$$

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}.(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{C}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}) \tag{1.38}$$

Le produit scalaire et le produit vectoriel peuvent être interchangés :

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}).\overrightarrow{C} \tag{1.39}$$

(ii) Triple produit vectoriel

Le produit mixte de ces trois vecteurs est

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) \tag{1.40}$$

Le triple produit vectoriel peut être simplifier par la relation **BAC** − **CAB**

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C}) - \overrightarrow{C}(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) \tag{1.41}$$

Notez que

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}).(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C})(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{D}) - (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{D})(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{C}) \tag{1.42}$$

et

$$\overrightarrow{A} \times [\overrightarrow{B} \times (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D})] = \overrightarrow{B}[\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D})] - (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B})(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) \tag{1.43}$$

1.3.6 Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ sont coplanaires (ils appartiennent à un même plan) si

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = 0 \tag{1.44}$$

Exemple 1.12
Soient $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ trois vecteurs tels que

$$\overrightarrow{A} = 2\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}; \qquad \overrightarrow{B} = 3\hat{x} + 2\hat{y} + 0\hat{z}; \qquad \overrightarrow{A} = 0\hat{x} + 4\hat{y} + 0\hat{z}$$

$\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ sont-ils coplanaires ?

Solution

$$\vec{\mathbf{A}}.(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\times(2\times 0 - 4\times 0) - 0\times(3\times 0 - 0\times 0) + 0\times(3\times 4 - 0\times 2) = 0 \tag{1.45}$$

Donc $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont coplanaires.

1.4 Calcul différentiel

1.4.1 Dérivée et différentielle

(a) Cas d'une fonction scalaire

Considérons une fonction à une seule variable : $f(x)$

La différentielle de f notée df s'écrit

$$df = (\frac{df}{dx})dx = f'(x)dx \tag{1.46}$$

$\frac{df}{dx} = f'(x)$ est la dérivée de f. Elle représente la pente de la courbe (graphe) f vs x. La dérivée nous informe à quelle vitesse $f(x)$ varie lorsqu'on modifie l'argument x d'une infime quantité dx. Par exemple, comme on peut voir sur Fig. 1.14(a), la fonction varie lentement avec x, et la dérivée correspondante est petite. Dans la figure 1.14(a), f augmente rapidement avec x, et la dérivée augmente à mesure qu'on s'éloigne de $x = 0$. [1]

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\delta x \to +0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{1.47}$$

Dans le cas d'une fonction à trois variables $f(x,y,z)$.

$$df = (\frac{\partial f}{dx})dx + (\frac{\partial f}{dy})dy + (\frac{\partial f}{dz})dz \tag{1.48}$$

Avec

$$\frac{\partial f}{dx} = \lim_{\delta x \to +0} \frac{f(x+\delta x,y,z) - f(x,y,z)}{\delta x} \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial f}{dy} = \lim_{\delta y \to +0} \frac{f(x,y+\delta y,z) - f(x,y,z)}{\delta y} \tag{1.50}$$

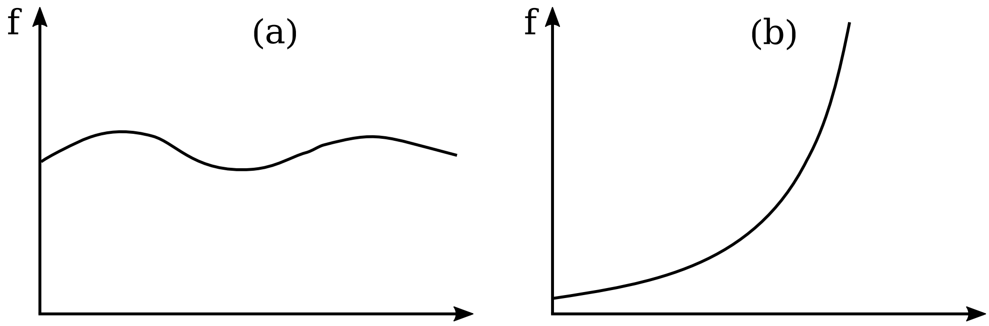

FIGURE 1.14 – Sens géométrique du gradient

$$\frac{\partial f}{dz} = \lim_{\delta z \to +0} \frac{f(x, y, z + \delta z) - f(x, y, z)}{\delta z} \tag{1.51}$$

Exemple 1.13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 12x^2 + 4x$

(b) $g(x) = 4x^3 + 2x^2 + 1$

Solution

$\frac{df}{dx} = 24x + 4$

$\frac{dg}{dx} = 12x^2 + 4x$

Exemple 1.14

Calculer la différentielle de la fonction suivante :

$f(x, y, z) = 2x^4 + 3xy^2 + x^2y^3z^4$

Solution

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{dx} = 8x^3 + 3y^2 + 2xy^3z^4 \\ \frac{\partial f}{dy} = 6xy + 3x^2y^2z^4 \\ \frac{\partial f}{dz} = 4x^2y^3z^3 \end{cases}$$

Donc

$df = (8x^3 + 3y^2 + 2xy^3z^4)\hat{x} + (6xy + 3x^2y^2z^4)\hat{y} + (4x^2y^3z^3)\hat{z}$

Règles de dérivation

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \tag{1.52}$$

$$\frac{d(\alpha f)}{dx} = \alpha \frac{df}{dx} \tag{1.53}$$

$$\frac{d(fg)}{dx} = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx} \tag{1.54}$$

$$\frac{d(\frac{f}{g})}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} \tag{1.55}$$

(b) Cas d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{\mathbf{V}}$(t)

Soit $\overrightarrow{V}(t)$ une fonction vectorielle et soit f une fonction scalaire.

$$\frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} = \lim_{\delta t \to +0} \frac{\overrightarrow{V}(t+\delta t) - \overrightarrow{V}(t)}{\delta t} \tag{1.56}$$

Règles de dérivation

$$\frac{d(\overrightarrow{V_1}(t) \pm \overrightarrow{V_2}(t))}{dt} = \frac{d\overrightarrow{V_1}(t)}{dt} \pm \frac{d\overrightarrow{V_2}(t)}{dt} \tag{1.57}$$

$$\frac{d(\alpha \overrightarrow{V}(t))}{dt} = \alpha \frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} \tag{1.58}$$

$$\frac{d(f\overrightarrow{V}(t))}{dt} = \frac{df}{dt}\overrightarrow{V}(t) + f\frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} \tag{1.59}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{V_1}(t).\overrightarrow{V_2}(t))}{dx} = (\frac{d\overrightarrow{V_1}(t)}{dt}).\overrightarrow{V_2}(t) + \overrightarrow{V_1}(t).(\frac{d\overrightarrow{V_2}(t)}{dt}) \tag{1.60}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{V_1}(t) \times \overrightarrow{V_2}(t))}{dx} = (\frac{d\overrightarrow{V_1}(t)}{dt}) \times \overrightarrow{V_2}(t) + \overrightarrow{V_1}(t) \times (\frac{d\overrightarrow{V_2}(t)}{dt}) \tag{1.61}$$

Soit un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(t) = V_x(t)\hat{x} + V_y(t)\hat{y} + \overrightarrow{V_z}(t)\hat{z} \tag{1.62}$$

$$\frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dV_y(t)}{dt}\hat{y} + \frac{dV_z(t)}{dt}\hat{z} \tag{1.63}$$

Exemple 1.15

Soit $\overrightarrow{V}(t)$ un champ vectoriel tel que :

$$\overrightarrow{V}(t) = (t^2 + \sin 2t)\ \hat{x} + \cos 3t\ \hat{y} + t^2\ \hat{z}$$

Calculer la dérivée première de $\overrightarrow{V}(t)$ par rapport à la variable t.

Solution

$$\frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} = 2(t + \cos 2t)\ \hat{x} - 3\sin 3t\ \hat{y} + 2t\ \hat{z}$$

1.4.2 Champs scalaires et champs vectoriels

(a) Champ scalaire $\equiv$ Fonction scalaire dépendant des coordonnées du point M : $f(x,y,z) = f(M)$.

(b) Champ vectoriel $\equiv$ Fonction vectorielle dépendant des coordonnées du point M : $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \overrightarrow{V}(M)$. Les composantes V_x, V_y, V_z dépendent des coordonnées du point M.

1.4.3 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient noté $\overrightarrow{grad}$ ou $\overrightarrow{\nabla}$ est un opérateur vectoriel qui agit sur un champ scalaire. Il a la forme d'un vecteur avec trois composantes :

$$\overrightarrow{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.64}$$

Le gradient d'un champ scalaire f est un champ vectoriel défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} f = (\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z})f \tag{1.65}$$

soit

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \tag{1.66}$$

On voit bien que

$$\overrightarrow{\nabla} f.\, d\vec{l} = (\frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{z}).(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}) \tag{1.67}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = df \tag{1.68}$$

où d$\vec{l}$ est l'élément de longueur infinitésimal en coordonnées cartésiennes.

Interprétation géométrique du gradient :

Comme tout vecteur, le gradient a une direction et une norme. Pour déterminer son sens géomètrique, nous allons réecrire le produit scalaire (Eq. 1.68) en utilisant l'Eq. 1.5.

$$df = \overrightarrow{\nabla} f.\, d\vec{l} = |\overrightarrow{\nabla} f|.|d\vec{l}|\cos\theta \tag{1.69}$$

Si on fixe $|d\vec{l}|$ et on varie l'angle θ, le changement maximum en f survient quand $\theta = 0$. C'est-à-dire pour une distance $|d\vec{l}|$ fixe, df est la plus grande quand on se deplace dans le même sens que $|\overrightarrow{\nabla} f|$. Ainsi,

Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f$ s'oriente dans le sens de l'augmentation maximale de la fonction f.

En outre,

La norme $|\overrightarrow{\nabla} f|$ donne la pente le long de cette direction maximale.

Exemple 1.16

Calculer le gradient des fonctions scalaires suivantes :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z$$

$$h(x,y,z) = yx^3 - xy + 2yz$$

Solution

$$\overrightarrow{\nabla} f = 2x\,\hat{x} + 2y\,\hat{y} + 2z\,\hat{z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} g = 2x\,\hat{x} - 2y\,\hat{y} - 2\,\hat{z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} h = (3yx^2 - y)\ \hat{x} + (x^3 - x + 2z)\ \hat{y} + 2y\ \hat{z}$$

1.4.4 Divergence d'un champ vectoriel

Soit $\overrightarrow{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ un champ vectoriel. La divergence d'un champ vectoriel est un champ scalaire défini par :

$$div\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.70}$$

Exemple 1.17

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\overrightarrow{A} = (x+1)\ \hat{x} + y^2\ \hat{y} + xz^2\ \hat{z}$$

La divergence de ce champ vectoriel s'écrit :

$$div\overrightarrow{A} = 1 + 2y + 2xz$$

Interprétation géométrique de la divergence :

La divergence d'un vecteur est une mesure de l'écart (divergence) de ce dernier par rapport au point en question. De la figure 1.15a, on peut voir que le champ vectoriel a une large divergence positive (si les flêches sont dirigées vers le centre, elle serait une divergence négative). La fonction dans Fig. 1.15b possède une divergence nulle alors que la fonction dans Fig. 1.15c a une divergence positive. [1]

1.4.5 Rotationnel d'un champ vectoriel

De la définition de $\overrightarrow{\nabla}$ on construit le rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} - (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})\hat{\mathbf{y}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}} \tag{1.71}$$

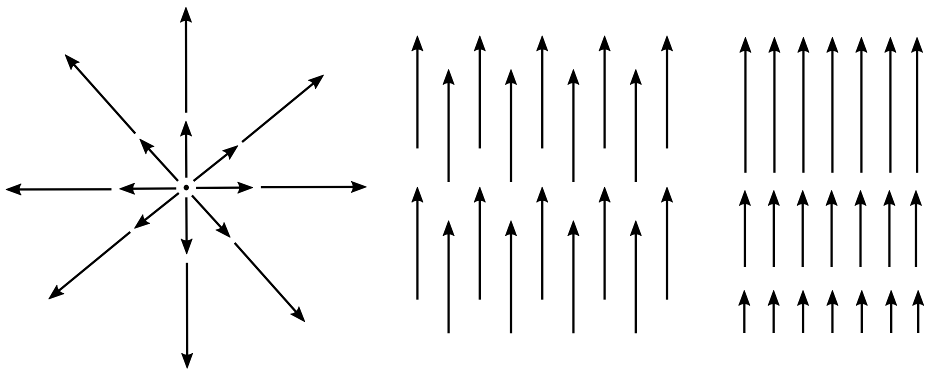

FIGURE 1.15 – Sens géométrique de la divergence

Exemple 1.18

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\overrightarrow{A} = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y} + 0\,\hat{z}$

Solution

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} == \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = (0-0)\hat{x} - (0-0)\hat{y} + (1+1)\hat{z} = 2\hat{z}$$

Interprétation géométrique du rotationnel :

Le rotationel est une mesure de combien le vecteur $\overrightarrow{A}$ "tourbillonne" autour du point en question. Ainsi les trois fonctions de la Fig. 1.15 ont toutes un rotationnel nul, tandis que les fonctions de la figure 1.16 ont un rotationnel substentiel, pointant dans la direction z, comme le suggère la règle naturelle de la main droite. [1]

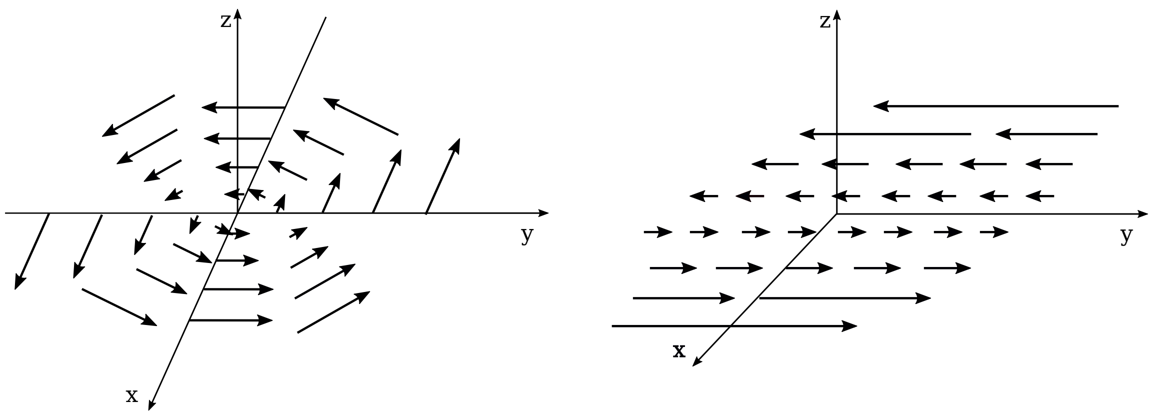

FIGURE 1.16 – Sens géométrique du rotationnel

Quelques propriétés

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = \overrightarrow{0} \tag{1.72}$$

$$div(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}) = 0 \tag{1.73}$$

1.4.6 Laplacien d'un champ scalaire

Le laplacien d'un champ scalaire est défini comme suit :

$$\Delta = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla}^2 \tag{1.74}$$

L'application à un champ scalaire f donne

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = div(\overrightarrow{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.75}$$

On a aussi

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{A}) - \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial z^2} \tag{1.76}$$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\,\hat{x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}\,\hat{y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\,\hat{z} \tag{1.77}$$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}\,\hat{x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\,\hat{y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\,\hat{z} \tag{1.78}$$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\,\hat{x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\,\hat{y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\,\hat{z} \tag{1.79}$$

Exemple 1.19

Calculer le laplacien du champ scalaire $f(x, y, z) = xy^2z^3$

Solution

$$\Delta f = 0 + 2 + 6z = 6z + 2$$

1.5 Coordonnées curvilignes

1.5.1 Coordonnées polaires (ρ, ϕ)

Les coordonnées polaires (ρ, ϕ) d'un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) sont définies à la figure 1.17. Leur relation avec les coordonnées cartésiennes peut être lu à partir de la figure. ρ est la distance au point à M partir de l'origine et ϕ est l'angle de rotation mesuré à partir de l'axe x.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \sin\phi \end{cases} \tag{1.80}$$

La distance ρ à partir de l'origine est égale à la norme de vecteur $\overrightarrow{OM}$

$$\rho = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.81}$$

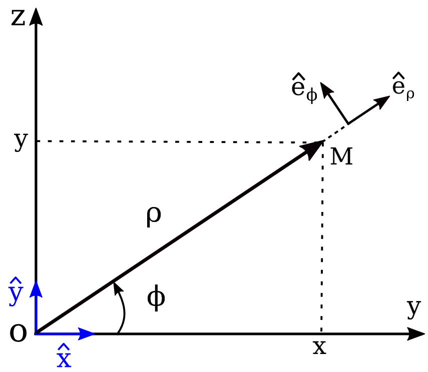

FIGURE 1.17 – Coordonnées polaires

De l'équation 1.80 on a

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin\phi}{\rho \cos\phi} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi \tag{1.82}$$

donc l'angle ϕ s'écrit

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \tag{1.83}$$

A partir l'équation 1.80 on a :

$$\begin{cases} dx = \cos\phi \, d\rho - \rho \sin\phi \, d\phi \\ dy = \sin\phi \, d\rho + \rho \cos\phi \, d\phi \end{cases} \tag{1.84}$$

D'autre part,

$$d\overrightarrow{OM} = dx \, \hat{x} + dy \, \hat{y} \tag{1.85}$$

Des équations 1.84 et 1.85 on a :

$$d\overrightarrow{OM} = (\cos\phi \, d\rho - \rho \sin\phi \, d\phi) \, \hat{x} + (\sin\phi \, d\rho + \rho \cos\phi \, d\phi) \, \hat{y} \tag{1.86}$$

$$d\overrightarrow{OM} = (\cos\phi \, \hat{x} + \sin\phi \, \hat{y}) \, d\rho + \rho(-\sin\phi \, \hat{x} + \cos\phi \, \hat{y}) \, d\phi \tag{1.87}$$

On pose

$$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{y} \\ \vec{e_\phi} = -\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y} \end{cases} \tag{1.88}$$

L'équation 1.87 s'écrira alors

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\ \vec{e_\rho} + \rho\ d\phi\ \vec{e_\phi} \tag{1.89}$$

De l'équation 1.88 on obtient

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos\phi\ \vec{e_\rho} - \sin\phi\ \vec{e_\phi} \\ \hat{y} = \sin\phi\ \vec{e_\rho} + \cos\phi\ \vec{e_\phi} \end{cases} \tag{1.90}$$

On a aussi

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e_\rho}}{d\phi} = -\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y} = \vec{e_\phi} \\ \\ \dfrac{d\vec{e_\phi}}{d\phi} = -\cos\phi\ \hat{x} - \sin\phi\ \hat{y} = -\vec{e_\rho} \end{cases} \tag{1.91}$$

Si ϕ dépend du temps

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dfrac{d\phi}{dt}\dfrac{d\vec{e_\rho}}{d\phi} = \dfrac{d\phi}{dt}\vec{e_\phi} \\ \\ \dfrac{d\vec{e_\phi}}{dt} = \dfrac{d\phi}{dt}\dfrac{d\vec{e_\phi}}{d\phi} = -\dfrac{d\phi}{dt}\vec{e_\rho} \end{cases} \tag{1.92}$$

Expression d'un élément de surface

$$dA = dx\ dy = (\cos\phi\ d\rho - \rho\sin\phi\ d\phi)(\sin\phi\ d\rho + \rho\cos\phi\ d\phi) = \rho\ d\rho\ d\phi \tag{1.93}$$

Exemple 1.20 Calculer la surface d'un cercle de rayon R.
Solution
De l'équation 1.93 on a $dA = \rho\ d\rho\ d\phi$
Donc

$$A = \int dA = \iint \rho\ d\rho\ d\phi = \int_0^R \rho\ d\rho \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R \times \left[\phi\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \times (2\pi - 0) = \left(\frac{R^2}{2}\right)(2\pi) = \pi R^2$$

1.5.2 Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

Les coordonnées polaires est un cas particulier des coordonnées cylindriques ou la composante $z = 0$.

De la figure 1.18 on peut voir que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} \tag{1.94}$$

Avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM'} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} \\ \overrightarrow{M'M} = z\,\hat{z} \end{cases} \tag{1.95}$$

Donc

$$\overrightarrow{OM} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{1.96}$$

La différentielle de $\overrightarrow{OM}$ s'écrit

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} \tag{1.97}$$

En exprimant $\overrightarrow{OM'}$ en coordonnées polaire (voir 1.89) on aura

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\,d\phi\,\vec{e_\phi} + dz\,\hat{z} \tag{1.98}$$

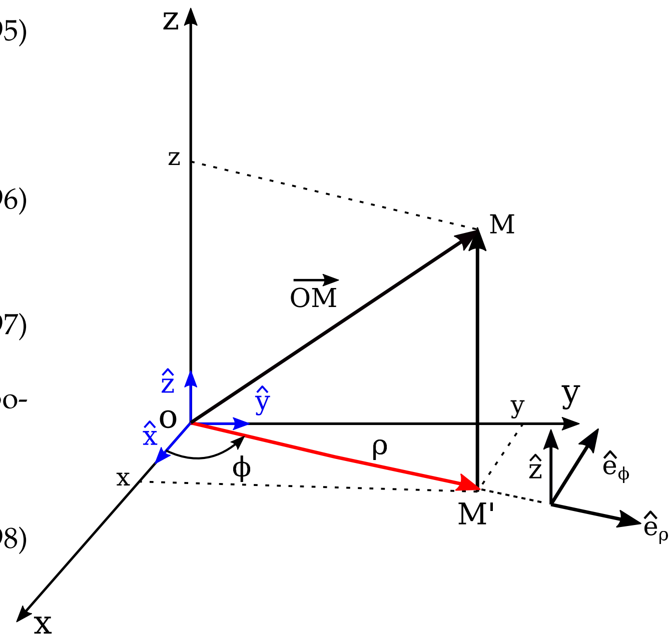

FIGURE 1.18 – Coordonnées cylindriques

Expression d'un élément de volume

$$d\tau = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz \tag{1.99}$$

Exemple 1.21 Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

Solution

De l'équation 1.99 on a $d\tau = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$

Donc

$$\tau = \int d\tau = \iiint \rho\,d\rho\,d\phi\,dz = \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R \times \left[\phi\right]_0^{2\pi} \times \left[z\right]_0^H$$
$$= \left(\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \times (2\pi - 0) \times (H - 0) = \left(\frac{R^2}{2}\right)(2\pi)\,H = \pi R^2 H$$

Dérivées vectorielles en coordonnées cylindriques

Soient $f(\rho, \phi, z)$ un champ scalaire et $\overrightarrow{V}(V_\rho, V_\phi, V_z)$ un champ vectoriel.

Gradient

$$\overrightarrow{\nabla} f(\rho, \phi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{e_\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e_z} \tag{1.100}$$

Divergence

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{1.101}$$

Rotationnel

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\vec{e_\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\phi) - \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right]\vec{e_z} \tag{1.102}$$

Laplacien

$$\overrightarrow{\nabla}^2 f = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.103}$$

Exemple 1.22
Calculer la divergence et le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\overrightarrow{V} = \rho(2 + \sin^2\phi)\,\vec{e_\rho} + \rho\sin\phi\cos\phi\,\vec{e_\phi} + 3z\,\vec{e_z}$$

Solution
Divergence

$$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\,[\rho(2+\sin^2\phi)] + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \phi}\,(\rho\sin\phi\cos\phi) + \frac{\partial}{\partial z}\,(3z)$$

$$= \frac{1}{\rho}\,2\rho\,((2+\sin^2\phi) + \frac{1}{\rho}\,\rho\,(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 3$$

$$= 4 + 2\sin^2\phi + \cos^2\phi - \sin^2\phi + 3$$

$$= 4 + \sin^2\phi + \cos^2\phi + 3 = 8$$

Rotationnel

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(3z) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin\phi\cos\phi)\right]\vec{e_\rho} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho(2+\sin^2\phi)\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}(3z)\right]\vec{e_\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\phi\cos\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\rho\,(2+\sin^2\phi)\right)\right]\vec{e_z}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(2\,\rho\,\sin\phi\cos\phi) - \rho\,2\,\sin\phi\cos\phi\right)\vec{e_z} = \vec{0}$$

1.5.3 Coordonnées sphériques (r, ϕ, θ)

De la figure 1.19 on peut voir que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \qquad (1.104)$$

Avec

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad (1.105)$$

où

$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = (\widehat{OZ,\overrightarrow{OM}}) \\ \phi = (\widehat{OX,\overrightarrow{OM'}}) \end{cases} \qquad (1.106)$$

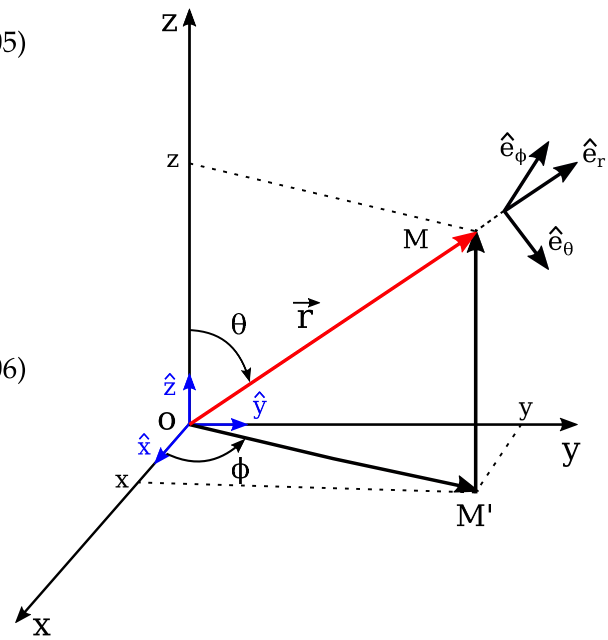

FIGURE 1.19 – Coordonnées sphériques

De l'équation 1.105, on a

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.107}$$

et

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \tag{1.108}$$

A partir de l'équation 1.104 on a

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} \tag{1.109}$$

Avec

$$\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\phi\,dr + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta - r\sin\theta\sin\phi\,d\phi \\ dy = \sin\theta\sin\phi\,dr + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + r\sin\theta\cos\phi\,d\phi \\ dz = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \end{cases} \tag{1.110}$$

Des équations 1.109 et 1.110 on a

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} = {} & (\sin\theta\cos\phi\,dr + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta - r\sin\theta\sin\phi\,d\phi)\,\hat{x} \\ & +(\sin\theta\sin\phi\,dr + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + r\sin\theta\cos\phi\,d\phi)\,\hat{y} \\ & + (\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)\,\hat{z} \end{aligned} \tag{1.111}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} = {} & (\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z})\,dr \\ & + r\,(\cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z})\,d\theta \\ & + r\sin\theta\,(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})\,d\phi \end{aligned} \tag{1.112}$$

Soit

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\;\sin\theta\,d\phi\,\vec{e_\phi} \tag{1.113}$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \vec{e_\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{cases} \tag{1.114}$$

Il est facile de verifier que les vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\phi}$, et $\vec{e_\theta}$ forment une base orthonormée.

Expression d'un élément de volume

$$d\tau = (dr)\,(rd\theta)\,(r\sin\theta d\phi) = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \tag{1.115}$$

Exemple 1.23 Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

Solution

De l'équation 1.99 on a $d\tau = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$

Donc

$$\tau = \int d\tau = \iiint r^2 \, dr \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \times \left[\phi\right]_0^H$$

$$= \left(\frac{R^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \times (1+1) \times (2\pi - 0) = \left(\frac{R^3}{3}\right) \times 2 \times (2\pi) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Dérivées vectorielles en coordonnées sphériques

Soient $f(\rho, \phi, z)$ un champ scalaire et $\overrightarrow{V}(V_\rho, V_\phi, V_z)$ un champ vectoriel.

Gradient

$$\overrightarrow{\nabla} f(\rho, \phi, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \, \vec{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \, \vec{e_\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \, \vec{e_\phi} \tag{1.116}$$

Divergence

$$\overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \, V_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \tag{1.117}$$

Rotationnel

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \, V_\phi] - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi}\right] \vec{e_\rho} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r \, V_\phi)\right] \vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right] \vec{e_\phi} \tag{1.118}$$

Laplacien

$$\overrightarrow{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{1.119}$$

Exemple 1.24

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\overrightarrow{V} = (r\cos\theta) \, \vec{e_r} + (r \sin\theta) \, \vec{e_\theta} + (r \sin\theta \cos\phi) \, \vec{e_\phi}$$

Solution

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 r\cos\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, r\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(r\ \sin\theta\cos\phi\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\,3r^2\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,r\,2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,r\ \sin\theta\,(-\sin\phi)$$

$$= 3\ \cos\theta + \ 2\cos\theta - \sin\phi = 5\cos\theta - \sin\phi$$

1.6 Grandeurs physiques

1.6.1 Introduction

Une grandeur physique est toute quantité se rapportant à une propriété physique. La grandeur physique peut être quantifiée soit par la mesure ou par le calcul. Elle est caractérisée par une valeur numérique (intensité), une unité et une dimension (nature).

Unité Elle exprime la dimension permettant de quantifier la grandeur. Une grandeur peut être exprimée en plusieurs unité. Par exemple, la longueur peut être exprimée en millimètre (mm), en centimètre (cm), en mètre (m), en Kilomètre (Km), en $mile$, ...

Dimension Elle caractérise la nature de la grandeur et définit les unités utilisables. Le dimension de la grandeur G est notée [G]. Par exemple, la dimension de la longueur ℓ est $[\ell]$, celle du temps t est $[t]$, et celle de la masse m est $[m]$, ...

1.6.2 Systèmes d'unités

Citant Wikipedia :

> Un système d'unités est un ensemble d'unités de mesure couramment employées dans des domaines d'activité humaine, présentant des caractères de cohérence qui en facilitent l'usage entre les organisations d'une société humaine. Historiquement, les systèmes d'unités ont été d'une grande importance, soumis à réglementation et définis dans des domaines scientifiques et commerciaux.

Un système d'unités de mesure est défini par un choix conventionnel de grandeurs de base auxquelles sont associées des unités. Il existe plusieurs systèmes d'unité entre autres on trouve :

Système CGS

Ce système d'unité est formé de trois grandeurs fondamentales (longueur, masse, temps) et unités (centimètre, gramme, seconde).

Système MKSA

Ce système d'unité est formé de quatre grandeurs fondamentales (longueur, masse, temps, intensité électrique) et unités (mètre, kilogramme, seco nde, ampère).

Système International (SI)

Ce système d'unité est formé de sept grandeurs fondamentales (longueur, masse, temps, intensité électrique, température thermodynamique, quantité de matière, intensité lumineuse) et unités (mètre, kilogramme, seconde, ampère, kelvin, mole, candela). A ces

Grandeur	Symbole	Dimension	Unité
Longueur	ℓ	$[\ell] = L$	m (mètre)
Masse	m	$[m] = M$	kg (kilogramme)
Temps	t	$[t] = T$	s (seconde)
Intensité du courant électrique	i	$[i] = I$	A (ampère)
Température thermodynamique (absolue)	T	$[i] = \theta$	K (kelvin)
Intensité lumineuse	I_v	$[I_v] = \mathrm{J}$	Cd (la candela)
Quantité de matière	n	$[n] = N$	mol (mole)
Angle plan	α		rad (radian)
Angle solide	Ω	$[\Omega] = \Omega$	sr (stéradian)

TABLE 1.1 – Unités de base du système SI

grandeurs de base s'ajoutent deux autres grandeurs (angle plan et angle solide) [3]

En pratique, il est parfois commode d'utiliser des multiples ou des sous-multiples de ces unités (voir tableau 1.2)

Préfixe	Symbole	facteur
atto	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	μ	10^{-6}
milli	a	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
déci	d	10^{-1}
déca	da	10^{1}
hecto	h	10^{2}
kilo	k	10^{3}
méga	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
téra	T	10^{12}

TABLE 1.2 – Multiples et sous-multiples des unités de mesure en physique.

1.6.3 Grandeurs physiques dérivées

Les grandeurs physiques autres que celles du système SI sont appelées *grandeurs dérivées*. Elles sont exprimées en fonction des grandeurs fondamentales. Par exemple, la surface, le volume, la force, la vitesse et l'accélération sont des grandeurs dérivées.

3. Ces deux unités supplémentaires sont sans dimension, mais en photométrie le symbole du stéradian est maintenu.

Pour déterminer la dimension d'une grandeur physique dérivée G, on utilise les équations aux dimensions.

$$[G] = M^a L^b\, T^c\, I^d\, \theta^e\, J^f\, N^g \tag{1.120}$$

Quelques propriétés

$$[AB] = [A]\,[B] \tag{1.121}$$

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]} \tag{1.122}$$

$$[A^n] = [A]^n,\ \forall \in \mathbb{R} \tag{1.123}$$

Exemple 1.25

Surface

$$S = \ell^2 \Rightarrow [S] = [\ell^2] = [\ell]^2 = L^2$$

Unité : m^2

Volume

$$V = \ell^3 \Rightarrow [V] = [\ell^3] = [\ell]^3 = L^3$$

Unité : m^3

Vitesse

$$v = \frac{\ell}{t} \Rightarrow [v] = \left[\frac{\ell}{t}\right] = \frac{[\ell]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

Unité : $m\ s^{-1}$

Accélération

$$a = \frac{\ell}{t^2} \Rightarrow [v] = \left[\frac{\ell}{t^2}\right] = \frac{[\ell]}{[t]^2} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$$

Unité : $m\ s^{-2}$

Force

$$F = m.a \Rightarrow [F] = [ma] = [m][a] = M\,\frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

Unité : $kg\ m\ s^{-2} \equiv N\ (Newton)$

Travail

$$W = F.d \Rightarrow [W] = [Fd] = [F][f] = MLT^{-2}\,L = ML^2T^{-2}$$

Unité : $kg\ m^2\ s^{-2} \equiv J\ (Joule)$

Puissance

$$\mathcal{P} = F.v \Rightarrow [\mathcal{P}] = [Fv] = [F][v] = MLT^{-2}\,LT^{-1} = ML^2T^{-3}$$

Unité : $kg\ m^2\ s^{-3} \equiv W\ (Watt)$

Pression

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow [\mathcal{P}] = [\frac{F}{S}] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

Unité : $kg\ m^{-1}\ s^{-2} \equiv P\ (Pascal)$

Remarque

(a) Une équation physique est une équation homogène.

(b) Une équation $A = B$ est dite homogène si $[A] = [B]$.

(c) $A + B = C + D$ est homogène si $[A] = [B] = [C] = [D]$

(d) $AB = C$ est homogène si $[A][B] = [C]$

1.7 Calculs d'erreurs

1.7.1 Erreur absolue

On appelle erreur absolue sur une mesure d'une grandeur physique G la différence entre la valeur *approchée* (*mesurée*) et la valeur *vraie* (*exacte*).

X_0 : valeur exacte (inconnue)

X : valeur mesurée

δX : erreur absolue

$$\delta X = X - X_0 \tag{1.124}$$

1.7.2 Erreur relative

L'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence.

$$\text{Erreur relative } = \frac{\delta X}{X} \tag{1.125}$$

1.7.3 Types d'erreurs

Il existe deux types d'erreurs

(1) ***Erreur aléatoire***

L'erreur aléatoire est une erreur que l'on traitera de façon statistique ou probabiliste. Par exemple, la mesure répétée de la période d'un pendule d'un chronomètre manuel donne des valeurs légérement différentes.

(2) ***Erreur systèmatique*** :

L'erreur systèmatique est une erreur qui va se reproduire à chaque mesure. Par exemple, si la voie 1 d'un oscilloscope n'est pas mise à zéro initialement, la valeur d'une tension mesurée sur cette voie sera systèmatiquement entachée de la même erreur.

1.7.4 Chiffres significatifs

Tout résultat numérique, de calcul ou de mesure, doit être présenté avec un certain nombre de chiffres significatifs. Le nombre de chiffres signicatifs indique la précision de la mesure. On se limite la plupart du temps à 3 ou 4 chiffres significatifs : à 3 chiffres significatifs , l'erreur de représentation du nombre est obligatoirement inférieure à %, avec 4 chiffres significatifs l'erreur est inférieure à ‰.

Les règles suivantes sont utiles pour identifier le nombre de chiffres significatifs.

1 Tous les chiffres différents de zéro sont significatifs.

2 Tous les zéros situés entre des chiffres différents de zéro sont significatifs.

Exemple 1.26

Le nombre 8.45 possède 3 chiffres significatifs.

Le nombre 356.7688 possède 7 chiffres significatifs.

Le nombre 4507 possède 4 chiffres significatifs.

Le nombre 40.56 possède 4 chiffres significatifs.

---

3 Les zéros situés au début d'un nombre ne sont pas significatifs. Pour déterminer le nombre de chiffres significatifs, il faut repérer le premier chiffre différent de 0 et compter le nombre de chiffres à droite de ce 0.

Exemple 1.27

Le nombre 0.0056 possède 2 chiffres significatifs.

Le nombre 9.56 possède 3 chiffres significatifs.

---

4 Les zéros situés à la fin d'un nombre sont significatifs.

Exemple 1.28

Le nombre 23700 possède 5 chiffres significatifs.

Le nombre 0.560 possède 3 chiffres significatifs.

---

5 Les chiffres devant la puissance de 10 sont significatifs.

Exemple 1.29

Le nombre 10.568×10^3 possèdent 5 chiffres significatifs.

Le nombre 2.8×10^{-2} possèdent 2 chiffres significatifs.

1.7.5 Incertitude absolue

Évaluer l'incertitude équivaut à estimer l'erreur aléatoire lors d'une mesure. Elle donne accès à une intervalle autour de la valeur mesurée dans laquelle est supposée appartenir la valeur vraie. Une mesure est toujours accompagnée d'une incertitude.

$$X \in [\overline{X} - \overline{\Delta X},\ \overline{X} + \overline{\Delta X}] \tag{1.126}$$

soit

$$X = \overline{X} \pm \overline{\Delta X} \tag{1.127}$$

$\overline{X}$: valeur moyenne de X

$\overline{\Delta X}$: Incertitude absolue sur la valeur moyenne de X

avec

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} \tag{1.128}$$

et

$$\overline{\Delta X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} |\overline{X} - X_i|}{N} = \frac{|\overline{X} - X_1| + |\overline{X} - X_2| + ... + |\overline{X} - X_N|}{N} \tag{1.129}$$

où N est le nombre de valeurs mesurées (nombre de mesures effectuées).

Exemple 1.30

Six étudiants se sont relayés pour mesurer le diamètre D d'un disque compact (CD), ils inscrivent leurs résultats dans le tableau suivant :

Étudiant 1	Étudiant 2	Étudiant 3	Étudiant 4	Étudiant 5	Étudiant 6
120.5 mm	119.0 mm	119.7 mm	118.9 mm	120.0 mm	119.3 mm

Solution

En utilisant les équationS 1.128 et 1.129 on aura

$$\overline{D} = \frac{120.5 + 119.0 + 119.7 + 118.9 + 120.0 + 118.7}{6} = 119.6\ mm$$

et

$$\overline{\Delta D} = \frac{|119.6 - 120.5| + |119.6 - 119.0| + |119.6 - 119.7| + |119.6 - 118.9| + |119.6 - 120.0| + |119.6 - 119.3|}{6}$$

$$\overline{\Delta D} = \frac{|0.9| + |0.6| + |-0.1| + |0.7| + |-0.4| + |0.3|}{6} = 0.5\ mm$$

D'où : $D = 119.6 \pm 0.5 mm$

Le diamètre exact du CD appartient à l'intervalle : $[119.1,\ 120.1] mm$.

Exemple 1.31

La masse m d'un objet est : $m = 15.3 \pm 0.1$ kg. Cela signifie qu'avec une incertitude absolue $\Delta m = 0.1$ Kg, la valeur exacte est comprise entre 15.2 kg et 15.4 kg.

1.7.6 Incertitude relative

L'incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur moyenne. Elle est sans unité (indiquée en %) et donne la précision sur la mesure.

$$\text{Incertitude relative } = \frac{\Delta X}{\overline{X}} \tag{1.130}$$

Exemple 1.32

Dans l'exemple 1.26, l'incertitude relative est : $\dfrac{\Delta\overline{D}}{\overline{D}} = \dfrac{0.5}{119.6} \approx 0.4\%$

et dans l'exemple 1.27 l'incertitude relative est : $\dfrac{\Delta\overline{m}}{\overline{m}} = \dfrac{0.1}{15.3} \approx 0.6\%$

1.7.7 Calcul d'incertitude

On calcule l'incertitude de deux façons :

(1) Méthode de la différentielle de la fonction logarithmique

Dans cette méthode le calcul se fait en deux temps. On calcul d'abord le logarithme de l'expression de f

Soit une fonction f telle que

$$f(x,y,z) = K\frac{x^m y^n}{z^\ell}$$

$$\ln f(x,y,z) = \ln\left(K\frac{x^m y^n}{z^\ell}\right) = \ln K + m\ln x + n\ln y - \ell\ln z \tag{1.131}$$

Donc

$$d\ln f(x,y,z) = \frac{df}{f} = m\,\frac{dx}{x} + n\,\frac{dy}{y} - \ell\,\frac{dz}{z} \tag{1.132}$$

On remplace la différentielle (d) par l'incertitude absolue (Δ) et le signe $(-)$par $(+)$ car **les incertitudes (comme les erreurs) s'additionnent (s'ajoutent)**.

On obtient alors l'expression de l'incertitude relative

$$\frac{\Delta f}{f} = |m|\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + |n|\left|\frac{\Delta y}{y}\right| + |\ell|\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \tag{1.133}$$

L'incertitude absolue s'écrit alors

$$\Delta f = \left(|m|\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + |n|\left|\frac{\Delta y}{y}\right| + |\ell|\left|\frac{\Delta z}{z}\right|\right)f \tag{1.134}$$

(2) Méthode de la différentielle totale exacte

Dans cette méthode, on calcul d'abord la différentielle de la fonction f ensuite on remplace la différentielle (d) par l'incertitude absolue (Δ) et le signe $(-)$par $(+)$

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y,z} dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x,z} dy + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x,y} dz \tag{1.135}$$

On obtient alors l'expression de l'incertitude absolue

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} |\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} |\Delta z| \tag{1.136}$$

l'expression de l'incertitude absolue s'écrit alors

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} |\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} |\Delta z|}{f} \tag{1.137}$$

1.7.8 Exercices corrigés

Exercice 1.1

Dans l'espace muni d'une base orthonormée (O, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$), on considère trois points suivants : A $(1, 2, 0)$, B $(3, 0, 4)$, et C $(0, 3, 2)$.
(1) Représenter les points A, B et C dans le repère orthonormé (O, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$)

(2) Calculer :

(a) Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$

(b) Les normes $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ et $|\overrightarrow{CA}|$

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

(d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC}$, le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, et le produit mixte $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) . \overrightarrow{CA}$

(e) L'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

(f) la surface du triangle ABC et le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ et $|\overrightarrow{CA}|$.

(g) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont-ils coplanaires ?

Solution

(a) Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -3\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \hat{x} - \hat{y} - 2\hat{z}$$

(b) Les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{CA}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (2)^2)} == \sqrt{22}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2)} == \sqrt{6}$$

(c) Calcul de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

On peut vérifier en effectuant la somme des composantes de ces vecteurs.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (2 - 3 + 1)\hat{x} + (-2 + 3 - 1)\hat{y} + (4 - 2 - 2)\hat{z} = (0)\hat{x} + (0)\hat{y} + (0)\hat{z} = \vec{0}$$

(d) Calcul de $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ et $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC})\,.\,\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (2)(-3) + (-2)\,3 + 4\,(-2) = -6 - 6 - 8 = -20$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = -8\,\hat{x} - 8\,\hat{y}$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC})\,\overrightarrow{CA} = -8 \times (1) + (-8) \times (-1) + 0 \times (-2) = 0$$

(e) Calcul de l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-20}{24 \times 22} = -0.038 \Longrightarrow \theta = 92.2^\circ$$

(f) Calcul de la surface du triangle ABC

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|(-\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

(g) le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ et $|\overrightarrow{CA}|$.
(h) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ appartiennent donc à un même plan car :

$$V = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA}| = 0$$

Exercice 1.2

Pour calculer le volume d'un cylindre, on mesure son rayon R $(2.50 \pm 0.02\ m)$ ainsi que sa hauteur H $(6.25 \pm 0.04\ s)$, et on utilise la loi suivante :

$$S = 2\pi R\ H$$

Calculer g avec son incertitude relative et son incertitude absolue.

Solution

(a) Méthode de la différentiation logarithmique

Calcul de la valeur mooyenne de S

$$S = 2\pi R\, H = 2\pi \times 2.50 \times 6.25 \approx 98.2\ m^2$$

$$\ln S = \ln 2\pi + \ln R + \ln H$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{dR}{R} + \frac{dH}{H}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = \frac{0.02}{2.50} + \frac{0.03}{6.25} = 1.44 \times 10^{-2} = 1.44\%$$

$$\Delta S = 1.44 \times 10^{-2} \times 98.2 \approx 1.41\ m^2$$

(b) Méthode de la différentielle totale exacte

$$dS = \left[\frac{\partial S}{\partial R}\right]_H dR + \left[\frac{\partial S}{\partial H}\right]_R dH = 2\pi\ H\ dR + 2\pi\ R\ dH = 2\pi(R\ dH + H\ dR) =$$
$$2\pi(2.50 \times 0.04 + 6.25 \times 0.02) \approx 1.41\ m^2$$

$$\frac{\Delta S}{S} \approx 1.44\%$$

CHAPITRE 2

CINÉMATIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

2.1 Généralités

1 L'objectif de la cinématique est d'étudier les relations entre les paramètres du mouvement sans se soucier des causes de ce dernier.

2 Si les dimensions du corps matériel sont très petites (negligeables) devant la distance parcourue, le corps matériel est considéré comme un *point matériel*. On parle alors de la *cinématique du point matériel.*

3 Le mouvement est dit *particulier* si tous les points du corps effectuent le même mouvement.

4 Un corps est en mouvement par rapport à un autre si sa position mesurée par un deuxième corps change en fonction du temps. Il est, par conséquent, nécessaire de définir un *système de référence ou référentiel* par rapport auquel on décrit et on analyse le mouvement. Pour constituer un référentiel, *un observateur* muni d'une orloge est lié à un système de coordonnées.

2.2 Étude descriptive du mouvement d'un point matériel

2.2.1 Position d'un mobile

Un *mobile* veut dire ici un point matériel en mouvement. La position du mobile est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (voir figure 2.2) appelé *vecteur position* ou *rayon vecteur*.

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \tag{2.1}$$

Les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ sont appelées : ***équations horaires du mouvement*** ou ***coordonnées du mobile***

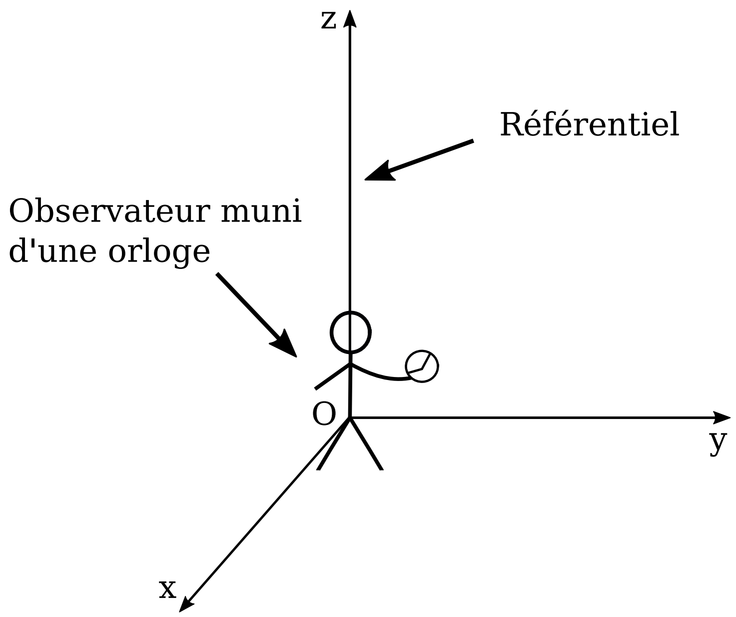

FIGURE 2.1 – Système de référence

à $t_0 \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t_0) = \vec{r}_0$

à $t_1 \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t_1) = \vec{r}_1$

$\vdots$

à $t \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}$

L'observateur mesure des temps $(t_0, t_1 \ldots)$ et des vecteurs position $(\overrightarrow{OM}(t_0), \overrightarrow{OM}(t_1) \ldots)$

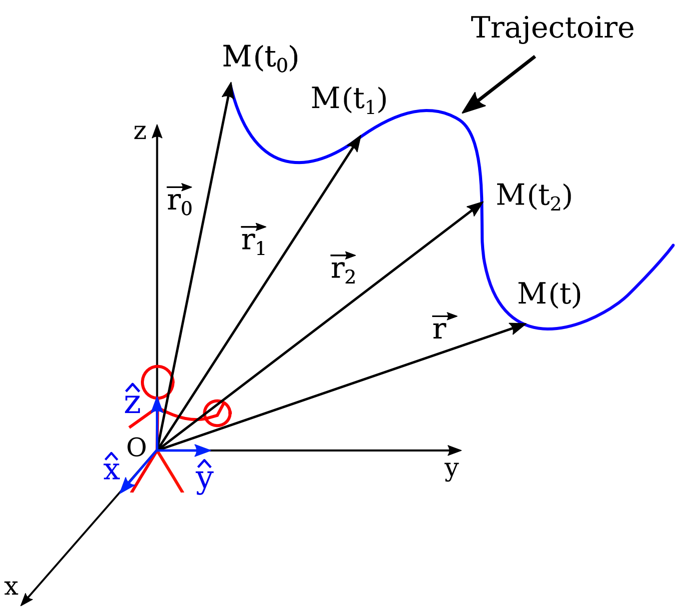

FIGURE 2.2 – Trajectoire et vecteurs positions d'un mobile

2.2.2 Trajectoire d'un mobile

La trajectoire d'un mobile (voir figure 2.2) est l'ensemble (lieu géométrique) des positions successives occupées par le mobile au cours du temps. Elle définit la *nature du mouvement*. Si la trajectoire est rectiligne, le mouvement est rectiligne et si la trajectoire est curviligne, le mouvement est curviligne.

2.2.3 Equation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire est la relation liant les coordonnées du mobile indépendamment du temps.

Exemple 2.1

Soient les équations horaires d'un point matériel en mouvement dans le plan (O, x, y).

$$\begin{cases} \text{x=2t} & (1) \\ \text{y=4t}^2\text{+1} & (2) \end{cases}$$

De (1) on a $t = \dfrac{x}{2}$ (3)

En remplaçant (3) dans (2) on aura : $y = 4(\dfrac{x}{2})^2 + 1 = x^2 + 1$

Donc $y = x^2 + 1 \longrightarrow$ équation d'un parabole.

La trajectoire est donc une parabole.

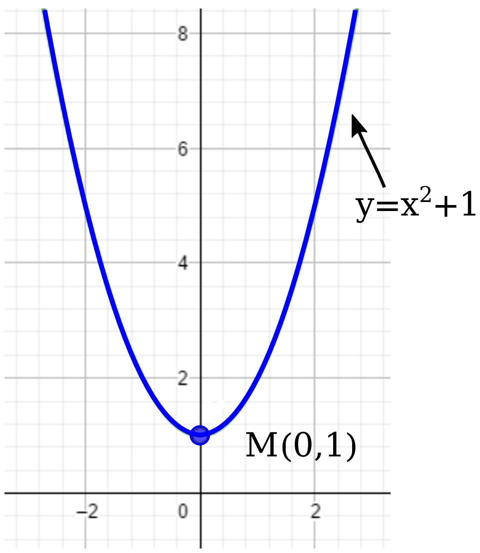

FIGURE 2.3 – Trajectoire parabolique

2.2.4 Vecteur deplacement

$$\overrightarrow{OM}(t_0) = \overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$$
$$\overrightarrow{OM}(t_1) = \overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM} = \vec{r}$$

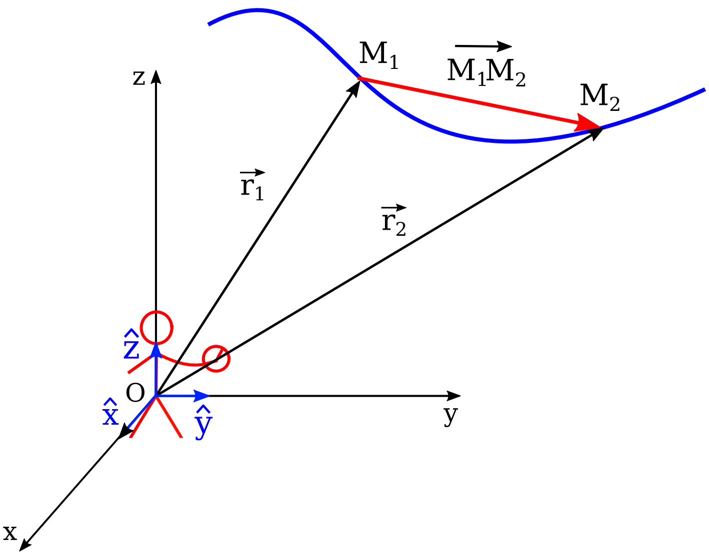

FIGURE 2.4 – Vecteurs deplacement d'un mobile

On définit le vecteur deplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ (voir figure 2.4) comme suit :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{M_1O} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{\Delta r} \tag{2.2}$$

On a

$$\vec{r}_1 = x_1(t)\hat{x} + y_1(t)\hat{y} + z_1(t)\hat{z} \tag{2.3}$$
$$\vec{r}_2 = x_2(t)\hat{x} + y_2(t)\hat{y} + z_2(t)\hat{z} \tag{2.4}$$

Le vecteur deplacement s'écrit alors :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Big(x_2(t) - x_1(t)\Big)\,\hat{x} + \Big(y_2(t) - y_1(t)\Big)\,\hat{y} + \Big(z_2(t) - z_1(t)\Big)\,\hat{z} \tag{2.5}$$

2.2.5 Vecteur vitesse

(a) Vitesse moyenne

La vitesse moyenne indique la variation de la distance entre deux positions $M(t_1)$ et $M(t_2)$ occupées par le mobile par rapport au temps écoulé entre ces deux positions.

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.6}$$

(b) Vitesse instantanée

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \tag{2.7}$$

2.2.6 Vecteur accélération

(a) Accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation dans le temps de la vitesse entre deux positions du mobile.

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2.8}$$

(b) Accélération instantanée

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{2.9}$$

Quelques remarques importantes

(i)

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \vec{r} = \int \vec{v} dt \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = \int \vec{a} dt \end{cases} \tag{2.10}$$

(ii)

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\,\hat{x} + \dfrac{dy}{dt}\,\hat{y} + \dfrac{dz}{dt}\,\hat{z} \\ \vec{v} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\,\hat{x} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\,\hat{y} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\,\hat{z} \end{cases} \tag{2.11}$$

2.3 Différents types de mouvement

2.3.1 Mouvement rectiligne

Un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est une ligne droite.

$x(t) = \overline{OM}$ (valeur algebrique) est l'abscisse du point M à l'instant t.

Le vecteur position du mobile s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overline{OM}\,\hat{x} = x(t)\,\hat{x} \tag{2.12}$$

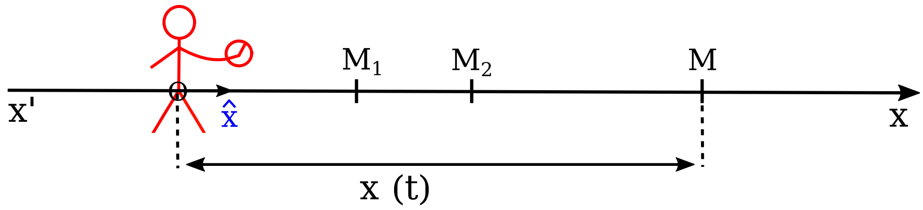

FIGURE 2.5 – Mouvement rectiligne

Le vecteur deplacement entre t_1 et t_2 est :

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1M_2} \tag{2.13}$$

$$\Delta\overline{OM} = \overline{M_1O} + \overline{OM_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \overline{M_1M_2} = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1 \tag{2.14}$$

La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 est :

$$\overline{v}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Longrightarrow \vec{v}_m = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)\hat{x} = \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}\hat{x} \tag{2.15}$$

À $t = t_0$, la vitesse instantanée

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0}\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} \tag{2.16}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \tag{2.17}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt} \tag{2.18}$$

Avec $x_0 = x(t_0)$, la position initiale du mobile.
L'accélération moyenne entre t_1 et t_2 est :

$$\overline{a}_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Longrightarrow \vec{a}_m = \left(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\right)\hat{x} \tag{2.19}$$

L'accélération instantanée à l'instant t est :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \tag{2.20}$$

$$\Longrightarrow dv(t) = a(t)\,dt \tag{2.21}$$

$$\Longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \tag{2.22}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt} \tag{2.23}$$

Avec $v_0 = v(t_0)$, la vitesse initiale du mobile.

Exemples de mouvements rectilignes

(1) *Mouvement rectiligne uniforme*

Le mouvement rectiligne est uniforme si la vitesse du mobile est constante.

$$v(t) = v_0 \quad \Longrightarrow \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 0 \tag{2.24}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt + x_0 = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + x_0 = v_0 \int_{t_0}^{t} dt + x_0 \tag{2.25}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = v_0\, (t - t_0) + x_0} \tag{2.26}$$

(2) *Mouvement rectiligne uniformément varié*

Le mouvement rectiligne est uniforme si l'accélération du mobile est constante.

$$a(t) = a_0 \tag{2.27}$$

Avec $a_0 = a(t_0)$, l'accélération initiale du mobile.

On a d'après l'equation 2.23

$$\Longrightarrow v(t) = \int_{t_0}^{t} a_0\, dt + v_0 = a_0 \int_{t_0}^{t} dt + v_0 \tag{2.28}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v(t) = a_0\, (t - t_0) + v_0} \tag{2.29}$$

Des équations 2.18 et 2.29 on a :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(a_0\, (t - t_0) + v_0 \Big)\, dt \tag{2.30}$$

$$= x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \left[\int_{t_0}^{t} t\, dt - t_0 \int_{t_0}^{t} dt \right] \tag{2.31}$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + a_0 \left[\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0) \right] \tag{2.32}$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + a_0 \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 + t_0^2 - t_0\, t) \right] \tag{2.33}$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + a_0\left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t_0^2 - t_0\, t)\right] \tag{2.34}$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \tag{2.35}$$

Donc

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0} \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} \text{Si } \ \vec{v}\,.\,\vec{a} > \vec{0} & \text{Le mouvement est uniformément accéléré.} \\ \text{Si } \ \vec{v}\,.\,\vec{a} < \vec{0} & \text{Le mouvement est uniformément retardé.} \end{cases} \tag{2.37}$$

Exemple 2.2

Cas d'un point matériel en chute libre.

On a

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{v}\,.\,\vec{g} > \vec{0} \end{cases}$$

$$v(t) = v_0 + g\, t$$

$$z(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

$$\text{Si à } t = t_0 \quad \begin{cases} z = z_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

On aura alors

$$\begin{cases} v(t) = g\, t \\ x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

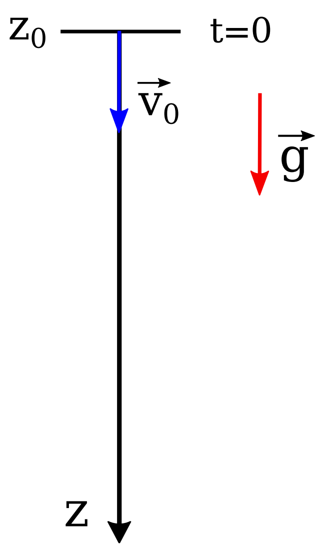

FIGURE 2.6 – Chute libre

2.3.2 Mouvement dans un plan

(1) Coordonnées polaires

$x = \rho \cos\phi$

$y = \rho \sin\phi$

$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}$

$= \rho\cos\phi\,\hat{x} + \rho\sin\phi\,\hat{y} = \rho\,\vec{e}_\rho$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

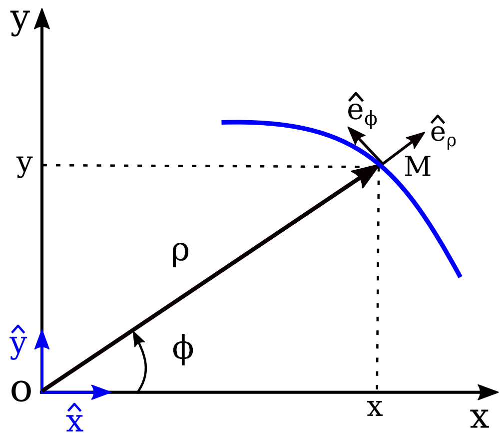

FIGURE 2.7 – Coordonnées polaires

On a

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\ \vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{cases} \tag{2.38}$$

et

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{e}_\phi \\ \hat{y} = \sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{e}_\phi \end{cases} \tag{2.39}$$

(a) ***Expression de la vitesse***

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\,\vec{e}_\rho)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \tag{2.40}$$

En tenant de l'équation 1.91, l'expression de la vitesse devient :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{e}_\phi \tag{2.41}$$

On pose

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} \\ \dfrac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \end{cases} \tag{2.42}$$

$\dot{\phi}$ est la vitesse de rotation ou vitesse angulaire.

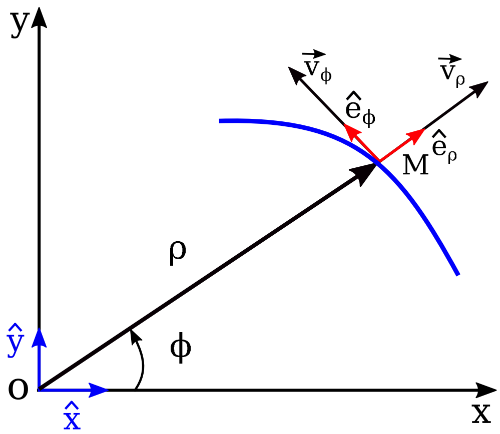

FIGURE 2.8 – Vitesse radiale et vitesse tangentielle

On aura alors

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi \tag{2.43}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{v}_\rho = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho & (\text{vitesse radiale}) \\ \vec{v}_\phi = \rho\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi & (\text{vitesse tangentielle}) \end{cases} \tag{2.44}$$

(a) ***Expression de l'accélération***

On a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho)}{dt} + \frac{d(\rho\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi)}{dt} \tag{2.45}$$

$$= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\,\vec{e}_\rho + \dot{r}\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \rho\,\frac{d\dot{\phi}}{dt}\,\vec{e}_\phi + \rho\,\dot{\phi}\,\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} \tag{2.46}$$

$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \rho\,\ddot{\phi}\,\vec{e}_\phi - \rho\,\dot{\phi}^2\;\vec{e}_\rho \tag{2.47}$$

L'accélération s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\phi})\vec{e}_\phi} \tag{2.48}$$

2.3.3 Abcisse curviligne

Le mobile suit une trajectoire (C). Son vecteur position (rayon veteur) est $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\ \hat{x} + y(t)\ \hat{y} + z(t)\ \hat{z}$ tel que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Son vecteur vitesse est $\vec{v} = \dfrac{dx(t)}{dt}\ \hat{x} + \dfrac{dy(t)}{dt}\ \hat{y} + \dfrac{dz(t)}{dt}\ \hat{z} = v_x(t)\ \hat{x} + v_y(t)\ \hat{y} + v_z(t)\ \hat{z}$

Pour mesurer les longueurs et les deplacements le long de la courbe on introduit l'abscisse curviligne $s(t)$.

On introduit aussi de manière arbitraire :

(i) Un point de référence $M(t_0) = M_0$

(ii) Une unité de longueur

(iii) Un sens positif de la trajectoire

$M = M(t)$
$M_0 = M(t_0)$
$M_1 = M(t_1)$
$M_2 = M(t_2)$

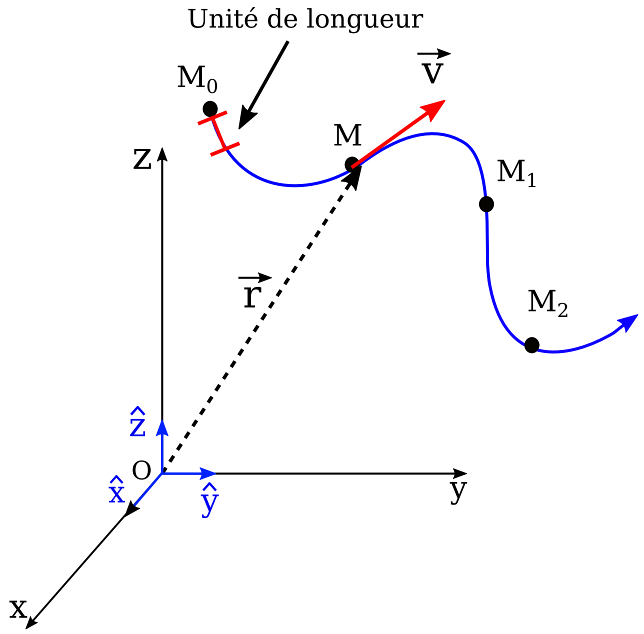

FIGURE 2.9 – Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne $s(t)$ représente ici la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}$. M_0 est la position du mobile à l'instant t_0 et M est sa position à l'instant t.

$$s(t) = \overset{\frown}{M_0M} \tag{2.49}$$

Lorsque le mobile passe de M_1 À M_2

$$\Delta s = s_2 - s_1 = s(t_2) - s(t_1) = \overset{\frown}{M_0M_2} - \overset{\frown}{M_0M_1} = \overset{\frown}{M_1M_2} \tag{2.50}$$

La vitesse instantannée est

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to t_0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to t_0} \left(\frac{\Delta \vec{r}\ \Delta s}{\Delta t\ \Delta s}\right) = \lim_{\Delta t \to t_0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right) \lim_{\Delta t \to t_0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \tag{2.51}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}} \tag{2.52}$$

Or on a

$$\vec{v} = v\ \hat{u}_t \tag{2.53}$$

Avec

$$\begin{cases} v = \dfrac{ds}{dt} \\ \hat{u}_t = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \end{cases} \tag{2.54}$$

$\hat{u}_t$ est un vecteur tangent à la trajectoire.

Donc

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\ \hat{u}_t \tag{2.55}$$

$$\begin{cases} v = |\vec{v}| = \dfrac{ds}{dt} & \text{La trajectoire est orientée dans le sens du mouvement} \\ v = -\dfrac{ds}{dt} & \text{La trajectoire est orientée dans le sens opposé au sens du mouvement} \end{cases} \tag{2.56}$$

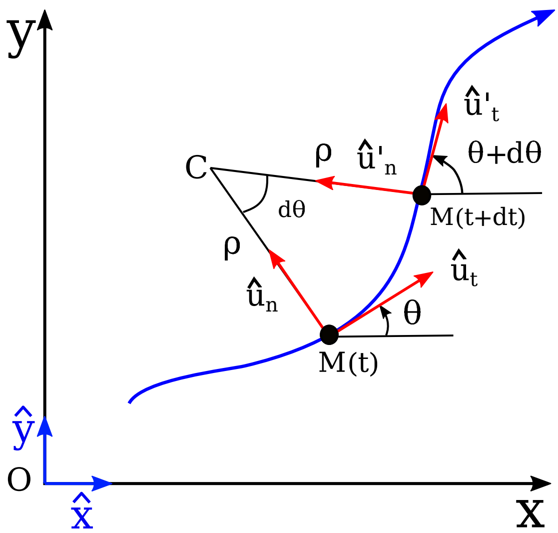

FIGURE 2.10 – Centre et rayon e courbure de la tajectoire en un point M

Dans ce qui suit, on considère le cas d'une trajectoire orientée dans le sens du mouvement.

$$\vec{v} = \frac{ds(t)}{dt} \Longrightarrow s(t) = s_0 + \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt \tag{2.57}$$

Accélération

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\,\hat{u}_t\right) = \frac{d}{dt}\left(v\,\hat{u}_t\right) = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t + v\,\frac{d\hat{u}_t}{dt} \tag{2.58}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_t \\ \vec{a}_n = v\dfrac{d\hat{u}_t}{dt} \end{cases} \tag{2.59}$$

$$\hat{u}_t = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} \tag{2.60}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\hat{u}_t}{dt} = (-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y})\frac{d\theta}{dt} = \hat{u}_n\,\dot{\theta} \tag{2.61}$$

$$= (-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y})\frac{d\theta}{dt} \tag{2.62}$$

Donc

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t + v\,\dot{\theta}\,\hat{u}_t} \tag{2.63}$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_t \\ \vec{a}_n = v\,\dot{\theta}\,\hat{u}_t \end{cases} \tag{2.64}$$

Pour les petits deplacements (infinitisimaux) du mobile entre t et $t + dt$, θ varie de $d\theta$.

$$s = \rho\,\theta \Longrightarrow ds = \rho\,d\theta \tag{2.65}$$

On a

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{1}{\rho} \tag{2.66}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_t\,\hat{u}_t + a_n\,\hat{u}_n = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_t} \tag{2.67}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt} \\ \vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \tag{2.68}$$

La base $(\hat{u}_t, \hat{u}_n)$ est appelée base intrinsèque de **Frenet**. Il est important de noter la différence entre la base polaire $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ et la base de Frenet. La base polaire dépend de la nature de la trajectoire et de l'origine O choisie alors que la base de Frenet depend uniquement du type de la trajectoire.

Cas particulier du mouvement circulaire

Dans le cas où $(\hat{u}_t, \hat{u}_n)$ coincide avec $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$.

$$\begin{cases} \rho = R \\ s(t) = R\,\theta(t) \\ \vec{v} = \dfrac{ds}{dt} = R\,\dot{\theta}\,\hat{u}_t = R\,\omega\,\hat{u}_t \end{cases} \tag{2.69}$$

$\dot{\theta} = \omega$ est la vitesse angulaire en rad/s

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_t \tag{2.70}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_t = R\,\ddot{\theta}\,\hat{u}_t \\ \vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\,\hat{u}_n = \dfrac{R^2\,\dot{\theta}^2}{R}\,\hat{u}_n = R\,\dot{\theta}^2\,\hat{u}_n = R\,\omega^2\,\hat{u}_n \end{cases} \tag{2.71}$$

$$\boxed{\vec{a} = R\,\ddot{\theta}\,\hat{u}_t + R\,\dot{\theta}^2\,\hat{u}_n = R\,\ddot{\theta}\,\hat{u}_t + R\,\omega^2\,\hat{u}_n} \tag{2.72}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.73}$$

(a) Mouvement rectiligne

$\rho \longrightarrow \infty$

$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_n = \vec{0}$

$\vec{a} = \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_t$

(b) Mouvement circulaire uniforme

$v = constante \Longrightarrow \omega = constante$
$\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_t = \vec{0}$
$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\,\hat{u}_n =$

2.3.4 Mouvement dans l'espace à trois dimensions

(a) Coordonnées cartésienne

Position

$$\vec{r} = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z} \tag{2.74}$$

Vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz}{dt}\,\hat{z} \tag{2.75}$$

$$= v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z} \tag{2.76}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}} \tag{2.77}$$

Accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{z} \tag{2.78}$$

$$= a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z} \tag{2.79}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}} \tag{2.80}$$

(a) Coordonnées cylindriques

Position

$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + +z\,\hat{z} \tag{2.81}$$

Vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \frac{dz}{dt}\,\hat{z} \tag{2.82}$$

Accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{z} \tag{2.83}$$

(a) Coordonnées sphériques

Position

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r \tag{2.84}$$

De l'équation 1.114 on a

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\Big[\cos\theta\ \cos\phi\ \hat{x} + \cos\theta\ \sin\phi\ \hat{y} - \sin\theta\ \hat{z}\Big] \\ \qquad\quad +\dot{\phi}\Big[-\sin\theta\ \sin\phi\ \hat{x} + \sin\theta\ \cos\phi\ \hat{y} - \sin\theta\ \hat{z}\Big] \end{cases} \tag{2.85}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta + \dot{\phi}\ \sin\theta\ \big(-\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y}\big) \tag{2.86}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta + \dot{\phi}\ \sin\theta\ \hat{e}_\phi} \tag{2.87}$$

En suivant la procédure on obtient

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\ \hat{e}_r + \dot{\phi}\ \cos\theta\ \hat{e}_\phi} \tag{2.88}$$

Et

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\ \Big(\cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{y}\Big) \tag{2.89}$$

Soit

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\ (\sin\theta\ \hat{e}_r + \cos\theta\ \hat{e}_\theta)} \tag{2.90}$$

Vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(r\,\vec{e}_r\Big) = \frac{dr}{dt}\,\hat{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt} \tag{2.91}$$

$$= \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\Big(\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{e}_\phi\Big) \tag{2.92}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{e}_\phi} \tag{2.93}$$

Accélération

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\Big(\dot{r}\,\hat{e}_r\Big) + \frac{d}{dt}\Big(r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\Big) + \frac{d}{dt}\Big(r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{e}_\phi\Big) \tag{2.94}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\dot{r}\,\hat{e}_r\Big) = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{e}_\phi \\ \dfrac{d}{dt}\Big(r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\Big) = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r + (\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\hat{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos\theta\,\hat{e}_\phi \\ \dfrac{d}{dt}\Big(r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{e}_\phi\Big) = -r\,\dot{\phi}^2\sin^2\theta\,\hat{e}_r - r\,\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{e}_\theta + \Big(\dot{r}\,\dot{\phi}\sin\theta + r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos\theta\Big)\,\hat{e}_\phi \end{cases} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = {} & \Big(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2\sin^2\theta\Big)\,\hat{e}_r + \Big(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\theta \\ & + \Big(2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\sin\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos\theta + r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta + \Big)\,\hat{e}_\phi \end{aligned} \tag{2.96}$$

Vecteur vitesse de rotation

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{n} \tag{2.97}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \tag{2.98}$$

$$\overrightarrow{O'M} = r\,\vec{e}_r \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_\theta = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \tag{2.99}$$

$$\vec{e}_\theta = \hat{n} \times \vec{e}_r \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = r\,\dot{\theta}\,(\hat{n} \times \vec{e}_r) = \dot{\theta}\,\hat{n} \times r\,\vec{e}_r = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \tag{2.100}$$

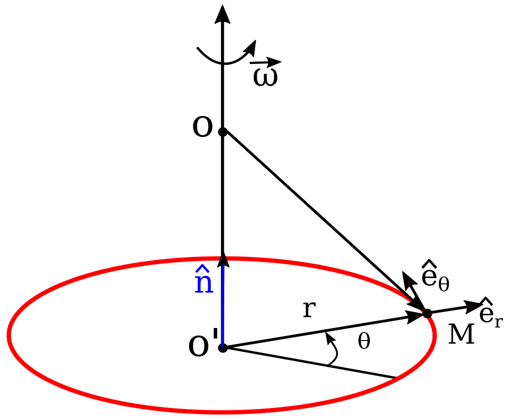

FIGURE 2.11 – Vitesse de rotation

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad (2.101)$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}} \quad (2.102)$$

2.3.5 Mouvement relatif

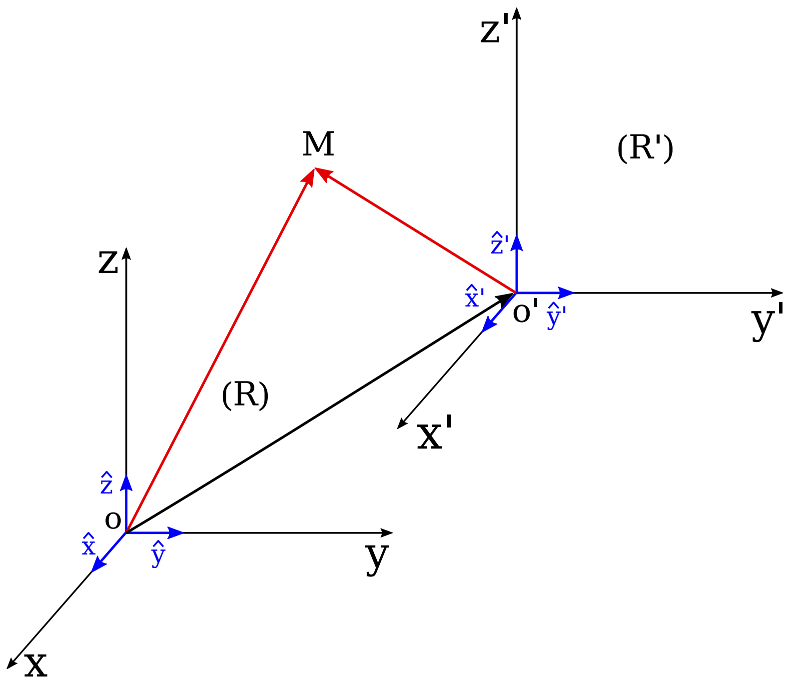

FIGURE 2.12 – Mouvement d'un point M dans deux référentiels R et R'.

Soient deux référentiels $R(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ et $R'(O, \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, Le référentiel (R) est considéré comme étant absolu (voir figure 2.12).

Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{2.103}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} & \text{position dans (R)} \\ \overrightarrow{O'M} = x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}' & \text{position dans (R')} \end{cases} \tag{2.104}$$

Composition des vitesses

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \tag{2.105}$$

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}'\right) \tag{2.106}$$

$$= \left(x'\,\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\,\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\,\frac{d\hat{z}'}{dt}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\,\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\,\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\,\hat{z}'\right) \tag{2.107}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\,\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\,\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\,\frac{d\hat{z}'}{dt}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\,\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\,\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\,\hat{z}'\right) \tag{2.108}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\,\dfrac{d\hat{x}'}{dt} + y'\,\dfrac{d\hat{y}'}{dt} + z'\,\dfrac{d\hat{z}'}{dt}\right) \\ \vec{v}_r = \dfrac{dx'}{dt}\,\hat{x}' + \dfrac{dy'}{dt}\,\hat{y}' + \dfrac{dz'}{dt}\,\hat{z}' \end{cases} \tag{2.109}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r} \tag{2.110}$$

La relation 2.110 représente la *la transformée de Galilée*. $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_r$ sont *la vitesse d'entraînement* et *la vitesse relative*.

Dans le cas particulier ou les axes de R' effectuent un mouvement de rotation autour de ceux de (R) avec une vitesse de rotation ω, nous avons d'après l'équation 2.102 :

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}' \\ \dfrac{d\hat{y}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}' \\ \dfrac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}' \end{cases} \tag{2.111}$$

Donc l'expression de la vitesse (voir equation 2.108) devient :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\left(\vec{\omega} \times \hat{x}'\right) + y'\left(\vec{\omega} \times \hat{y}'\right) + z'\left(\vec{\omega} \times \hat{z}'\right) \tag{2.112}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \times \left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) \tag{2.113}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}} \tag{2.114}$$

ω est la vitesse de rotation des axes $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ de (R′) par rapport à ceux de (R) . Cette vitesse est différente de la vitesse de rotation de O'. C'est le cas où O' décrit un cercle alors que les axes restent fixes.

Composition des accélérations

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\,\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\,\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\,\frac{d\hat{z}'}{dt}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\,\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\,\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\,\hat{z}'\right)\right] \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(x'\,\frac{d^2\hat{x}'}{dt^2} + y'\,\frac{d^2\hat{y}'}{dt^2} + z'\,\frac{d^2\hat{z}'}{dt^2}\right)\right] + 2\left(\frac{dx'}{dt}\,\frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\,\frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\,\frac{d\hat{z}'}{dt}\right) \\ &\quad + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\,\hat{x}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\hat{y}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\hat{z}'\right) \end{aligned} \tag{2.116}$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\,\dfrac{d^2\hat{x}'}{dt^2} + y'\,\dfrac{d^2\hat{y}'}{dt^2} + z'\,\dfrac{d^2\hat{z}'}{dt^2} \\ \vec{a}_r = \dfrac{d^2x'}{dt^2}\,\hat{x}' + \dfrac{d^2y'}{dt^2}\,\hat{y}' + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\,\hat{z}' \\ \vec{a}_c = 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\,\dfrac{d\hat{x}'}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\,\dfrac{d\hat{y}'}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\,\dfrac{d\hat{z}'}{dt}\right) \end{cases} \tag{2.117}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c} \tag{2.118}$$

Les termes $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$, et $\vec{a}_c$ représentent, respectivement, *l'accélération d'entraînemet*, *l'accélération relative*, et *l'accélération de Coriolis*.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{x}'}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{d\hat{x}'}{dt}\Big) = \dfrac{d}{dt}\Big(\vec{\omega}\times\hat{x}'\Big) = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{x}' + \vec{\omega}\times\dfrac{d\hat{x}'}{dt} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{x}' + \vec{\omega}\times\Big(\vec{\omega}\times\hat{x}'\Big) \\ \dfrac{d^2\hat{y}'}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{d\hat{y}'}{dt}\Big) = \dfrac{d}{dt}\Big(\vec{\omega}\times\hat{y}'\Big) = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{y}' + \vec{\omega}\times\dfrac{d\hat{y}'}{dt} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{y}' + \vec{\omega}\times\Big(\vec{\omega}\times\hat{y}'\Big) \\ \dfrac{d^2\hat{z}'}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{d\hat{z}'}{dt}\Big) = \dfrac{d}{dt}\Big(\vec{\omega}\times\hat{z}'\Big) = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{z}' + \vec{\omega}\times\dfrac{d\hat{z}'}{dt} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{z}' + \vec{\omega}\times\Big(\vec{\omega}\times\hat{z}'\Big) \end{cases} \tag{2.119}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\ \Big(x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}'\Big)\right] + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\Big(x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}'\Big)\right] \tag{2.120}$$

L'expression de l'accélération d'entraînement s'écrit alors comme suit :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\ \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\times\Big(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O'M}\Big) \tag{2.121}$$

L'accélération de Coriolis s'écrit alors :

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\ \Big(\vec{\omega}\times\hat{x}'\Big) + \frac{dy'}{dt}\ \Big(\vec{\omega}\times\hat{y}'\Big) + \frac{dz'}{dt}\ \Big(\vec{\omega}\times\hat{z}'\Big)\right] \tag{2.122}$$

$$= 2\left[\vec{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\ \hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\ \hat{y}' + \frac{dx'}{dt}\ \hat{z}'\right)\right] \tag{2.123}$$

$$= 2\left[\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\Big(x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}'\Big)\right] \tag{2.124}$$

$$= 2\left(\vec{\omega}\times\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right) \tag{2.125}$$

Donc

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r} \tag{2.126}$$

2.3.6 Exercices corrigés

Exercice 2.1

On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 - 4t \end{cases}$$

(a) Déterminer l'équation de la trajectoire.

(b) Calculer la vitesse du mobile.

(c) Montrer que son accélération est constante.

(d) Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération.

(e) En déduire le rayon de courbure.

Solution

(a) Equation de la trajectoire

On a

$$\begin{cases} x(t) = 2t & (1) \\ y(t) = 4t^2 - 4t & (2) \end{cases}$$

Pour déterminer l'équation de la trajectoire, il faut établir l'équation $y = f(x)$ en éliminant le temps t.

$$\begin{cases} (1) \Longrightarrow t = \dfrac{x}{2} \\ (2) \Longrightarrow y(x) = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = x^2 - 2x}$$

(b) Vitesse du mobile

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = 2 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = 8t - 4 \end{cases}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{64t^2 - 64t + 20}$$

(c) Accélération du mobile

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{y} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \dfrac{dvy}{dt} = \ddot{y} = 8 \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = 8\ m/s^2$$

(d) Composantes normale et tangentielle de l'accélération

Repère de Frenet $(\hat{a}_t, \hat{a}_n)$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(\sqrt{64t^2 - 64t + 20})}{dt} = \frac{128t - 64}{\sqrt{64t^2 - 64t + 20}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Longrightarrow a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$\Longrightarrow a_n = \sqrt{a^2 + a_t^2} = \sqrt{64 - \frac{128t - 64}{\sqrt{64t^2 - 64t + 20}}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{16}{|\vec{v}|}}$$

(e) Rayon de courbure

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Longrightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{16} = \frac{(64t^2 - 64t + 20)^{3/2}}{16}$$

Exercice 2.2

Un projectile est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant une angle α avec l'horizontale. On considère que le projectile n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur.

(a) Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ et l'équation de la trajectoire du projectile.

(b) Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire et le temps nécessaire pour l'atteindre.

(c) Calculer la portée du projectile et le temps nécessaire pour l'atteindre. Quelle est la valeur de α qui rend la portée maximale.

Solution

Le projectile n'est soumis qu'à l'action de son poids

L'application du PFD donne

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

(a) Détermination des coordonnées et de l'équation de la trajectoire du projectile

Vitesse du projectile

$$\begin{cases} a_x = 0 \Longrightarrow v_x = C_1 \\ a_y = -g \Longrightarrow a_y = -g \int dt = -g\ t + C_2 \end{cases}$$

Pour déterminer C_1 et C_2 on utilise les conditions initiales.

A $t = 0,\ \vec{v} = \vec{v_0}$ $\quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = v_0 \cos\theta \\ C_2 = v_0 \sin\theta \end{cases}$

$$\boxed{\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = -gt + v_0 \sin\theta \end{cases}}$$

Les coordonnées du projectile (x(t), y(t))

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x(t) = \int v_x dt = \int (v_0 \cos\theta) dt = (v_0 \cos\theta)t + C_1'$$

A $t = 0,\ x = 0 \Longrightarrow C_1' = 0$

Donc

$$\boxed{x(t) = (v_0 \cos\theta)t \text{ ....(1)}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Longrightarrow y(t) = \int v_y dt = \int (-gt + v_0 \sin\theta) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta + C_2'$$

A $t = 0,\ y = 0 \Longrightarrow C_2' = 0$

Donc

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \text{ .... (2)}}$$

Equation de la trajectoire

De (1) on a

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \text{ .... (3)}$$

En remplaçant (3) dans (2) on obtient

$$y(t) = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\, x^2 + \tan\theta\, x \quad \text{..........(3)}$$

La trajectoire est parabolique

(b) Détermination des coordonnées du sommet de la trajectoire et du temps nécessaire pour l'atteindre.

Au sommet S de la trajectoire on a :

$$v_y = 0 \Longrightarrow t_s = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

En remplaçant t_S dans (1) et (2) on aura

$$\boxed{\begin{cases} x_S = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \\ y_S = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} \end{cases}}$$

(b) Portée du projectile

La portée du projectile est son point de chute.

à $x_{max}, y = 0$

$$(3) \Longrightarrow \boxed{\mathrm{x}_{max} = p = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}}$$

Le temps nécéssaire pour l'atteindre s'obtient en remplaçant x_{max} dans (1)

$$t_p = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

On a

$$p_{max} : \frac{dp}{d\theta} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2.3

Deux trains A et B roulent sur des voies parallèles respectivement à 70 km/h et 90 km/h.

Calculer la vitesse relative de B par rapport à A quand :

- Ils se déplacent dans le même sens

- Ils se déplacent dans des sens opposés.

Solution

Vitesse de B par rapport à A (B/A) s'ils se deplacent dans le même sens.

Nous avons

$$\begin{cases} \text{Repère fixe : sol} \\ \text{Repère mobile : train A} \\ \text{Point mobile : train B} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_{B/sol} \\ \vec{v}_e = \vec{v}_{A/sol} \\ \vec{v}_e = \vec{v}_{B/A} \end{cases}$$

Avec

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Longrightarrow \vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_e$$

$$\mathrm{v}_r = v - v_e = 90 - 70 = 20\ km/h$$

Vitesse de B par rapport à A (B/A) s'ils se deplacent dans des sens opposés.

$$\mathrm{v}_r = v - (-v_e) = v + v_e = 90 + 70 = 160\ km/h$$

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

3.1 Lois de Newton

3.1.1 1ère loi de Newton : Principe d'inertie

(1) Référentiels galiléens

Un référentiel galiléen (ou référentiel d'inertie) est un référentiel dans lequel un objet libre (qui n'est soumi à aucune force extérieure) est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne unforme.

Exemples

(1) *Référentiel de Copernic :* Son origine est le centre de masse du système solaire et ses trois axes sont reliés à trois étoiles lointaines considérées comme étant fixes.

(2) *Référentiel Géocentrique :* Son origine est le centre de la terre et ses trois axes sont reliés à trois étoiles lointaines considérées comme étant fixes. Il est important de noter que la terre possède une accélération normale. Pour une durée très courte devant la période de révolution (une année), la trajectoire décrite par le centre de la terre est approximativement une ligne droite et le référentiel géocentrique peut être approximé à un référentiel galiléen.

(3) *Référentiel terrestre :* Son origine est un point sur la surface de la terre et ses trois axes sont orientés dans les trois directions de l'espace.

3.1.2 2ème loi de Newton : Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Soit (R) un référentiel d'inertie et m la masse d'un objet. La force $\sum \vec{F}$ (résultante des forces extérieures) que subit l'objet est égale à sa masse m par son accélération $\vec{a}$.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1}$$

$\sum \vec{F}$ est la force résultante des forces extérieures (l'objet ne peut pas exercer de forces sur lui-même)

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{0} \tag{3.2}$$

La 1ère loi de Newton (principe d'inertie) définit un référentiel d'inertie dans lequel on applique la 2ème loi de Newton.

3.1.3 3ème loi de Newton : Principe de l'action et de la réaction

Soient deux corps A et B en interaction mutuelle.

$\vec{F}_{AB}$: force qu'exerce A sur B.
$\vec{F}_{BA}$: force qu'exerce B sur A.
$\vec{F}_{AB}$ est égale et opposée à $\vec{F}_{BA}$.

$$\begin{cases} |\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| \\ \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \end{cases} \tag{3.3}$$

$\vec{F}_{AB}$ et $\vec{F}_{BA}$ sont de même nature (contact, gravitationnelle, électrostatique ...)

Exemple

$\vec{R}_{M/m}$: force de réaction de M sur m.
$\vec{A}_{m/M}$: force d'action de m sur M.

$\vec{R}_{S/M}$: force de réaction de sol sur M.
$\vec{A}_{M/S}$: force d'action de M sur le sol.

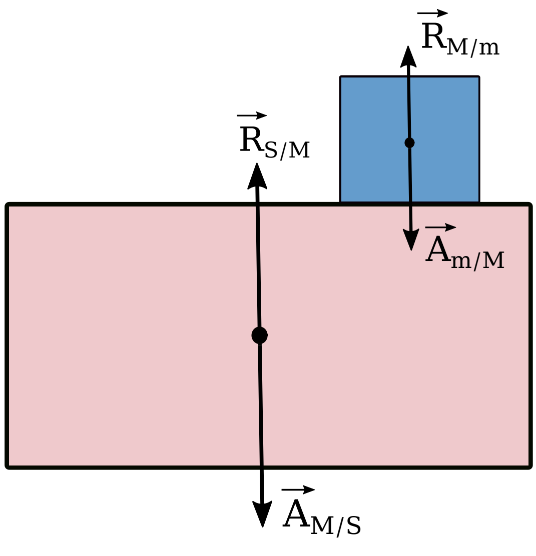

FIGURE 3.1 – Forces d'action et de réaction

$$\vec{A}_{m/M} = -\vec{R}_{M/m} \text{ et } \vec{A}_{M/S} = -\vec{R}_{S/M} \tag{3.4}$$

La 2ème loi de Newton permet d'écrire :

$$\vec{A}_{m/M} = m\vec{g} \text{ et } \vec{A}_{M/S} = M\vec{g} \tag{3.5}$$

$\vec{g}$ est l'accélération gravitationnelle.

3.1.4 Forces de frottement

(1) Origine des forces de frottement

Les forces de frottement résultent de l'interaction des atomes et des molécules des surfaces de contact.

(2) Frottement entre deux corps solides

$\vec{F}_f$ s'oppose au mouvement.

$\Longrightarrow \vec{F}_f$ a un sens opposé à celui de la vitesse $\vec{v}$.

$|\vec{F}_f| \propto ||\vec{N}| \Longrightarrow |\vec{F}_f| = \mu||\vec{N}|$. μ est le coefficient de frottement.

$\vec{A}_{M/S}$: force d'action de M sur le sol.

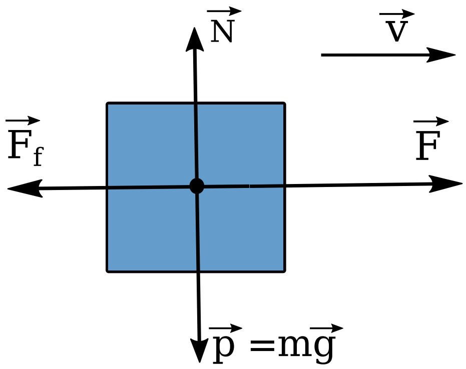

FIGURE 3.2 – Forces de frottement

On distingue le frottement statique et le frottement dynamique.

μ_s : coefficient de frottement statique

μ_c : coefficient de frottement dynamique ou cinétique

(a) Frottement statique

Soit un corps de masse m au repos sur une surface horizontale et soit F la force minimale nécessaire pour mettre en mouvement le corps. Cette force est alors égale à la force de frottement minimale $\vec{F}_{fs}^{(min)}$.

$F = F_{fs}^{(min)}$ et $\vec{F} = -\vec{F}_{fs}^{(min)}$

$\Longrightarrow \vec{F} + \vec{F}_{fs}^{(min)} = 0$.

Si on augmente la force F à partir 0, on atteint une valeur $F_{fs}^{(min)} = \mu_s N$ de F qui declenche le mouvement de M.

$\boxed{F \leq F_{fs}^{(min)} = \mu_s N}$

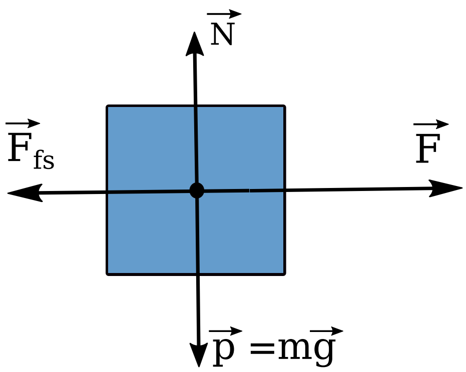

FIGURE 3.3 – Forces de frottement statique

(b) Frottement cinétique

$F \geq \mu_s N \Longrightarrow$ la masse m est en mouvement sur la surface horizontale.

$\vec{F}_{fc}$ est la force de frottement cinétique nécessaire pour maintenir un mouvement uniforme $(\vec{a})$ du corps de masse m..
$\vec{F} = -\vec{F}_{fc} \Longrightarrow \vec{F} + \vec{F}_{fc} = m\,\vec{a} = \vec{0}$.

$\boxed{F_{fc} = \mu_c N}$

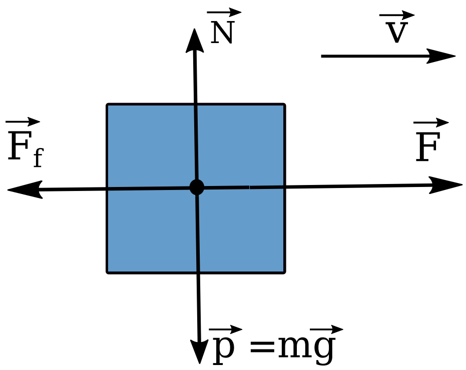

FIGURE 3.4 – Forces de frottement cinétique

Cas particulier du frottement d'un corps solide et d'un fluide (liquide ou gaz).

Soit un corps solide se deplaçant à faible vitesse dans un fluide. Ce dernier subit une force $\vec{F}$ opposée à son mouvement.

$$\vec{F} = -k\,\vec{v} \tag{3.6}$$

k : coefficient de propotionnalité dépendant de la forme de l'objet et de la nature du liquide.

$$k = k_i\,\eta \tag{3.7}$$

k_i et η sont, respectivement, le coefficient de forme du corps et la viscosité du fluide.

3.1.5 Forces d'inertie

(R) et (R') sont, respectivement, le référentiel galiléen et le reférentiel non-galiléen lié au wagon.

Pour l'observateur lié à (R) (voir figure 4.1), l'accélération de la masse m est égale à celle du wagon.

L'application du PFD donne :

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} T\sin\theta = ma \\ T\cos\theta = mg \end{cases} \tag{3.9}$$

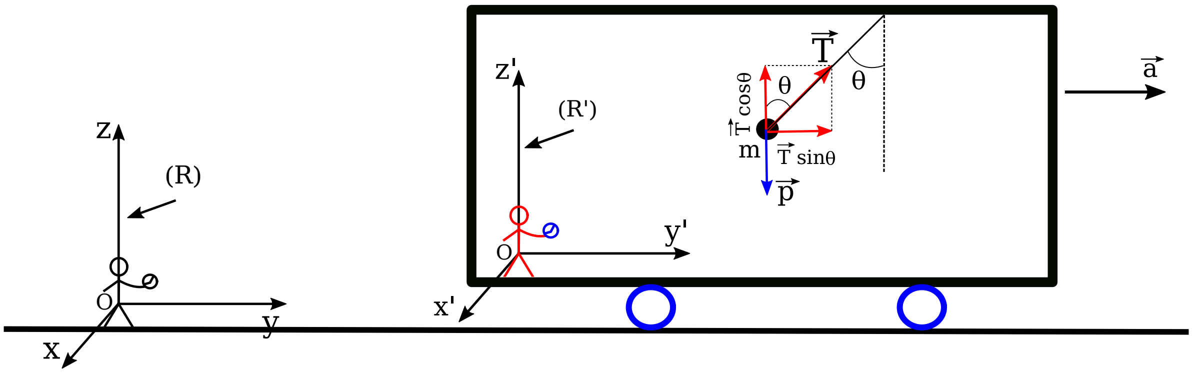

FIGURE 3.5 – Forces d'inertie

$$\Longrightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{a}{g}} \tag{3.10}$$

Pour l'observateur lié au wagon (R'), l'application du PFD est impossible car $m\vec{g}$ et $\vec{T}$ n'ont pas la même direction.

$$m\vec{g} + \vec{T} \neq m\vec{a} \tag{3.11}$$

Dans R nous avons

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c) \tag{3.12}$$

$$\Longrightarrow \sum \vec{F} - m(\vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{a}_r \tag{3.13}$$

On pose

$$\sum \vec{F}_{in} = -m(\vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \tag{3.14}$$

$\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$ sont, respectivement, les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis. L'observateur (R') doit ajouter les forces d'inertie à la résultante des forces matérielles. Les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis sont des forces non-matérielles que l'on aoute en pour pouvoir appliquer le PFD dans un référentiel non galiléen.

Dans le cas du pendule, nous avons :

$$\vec{a} = \vec{a}_e \tag{3.15}$$

L'accéLération de Coriolis $\vec{a} = \vec{0}$ car il n'y a pas de rotation de (R') sur (R).

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0} \tag{3.16}$$

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\vec{a} \tag{3.17}$$

$$\Longrightarrow m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_e = \vec{0} \tag{3.18}$$

$$\Longrightarrow m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_e = m\vec{a} \tag{3.19}$$

$$\boxed{m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}} \tag{3.20}$$

3.1.6 Loi de la gravitation universelle de Newton

La force de gravitation entre deux masses m et M (force centrale) s'écrit :

$$\vec{F}_G = G\,\frac{mM}{r^2} \tag{3.21}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11}\, kg^{-1}\, m^3\, s^{-2}$ est la constante gravitationnelle.
$r = R + h$ est la distance entre les deux masses m et M

En l'absence de frottement

$$\vec{F}_G = m\vec{a} \tag{3.22}$$

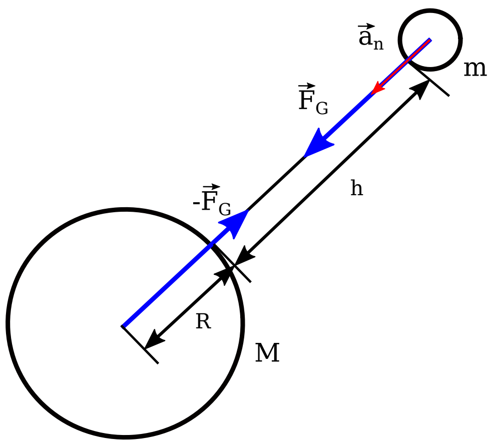

FIGURE 3.6 – Forces de gravitation

$$F_G = ma_n = m\frac{v^2}{r} = mg \tag{3.23}$$

$$\boxed{g = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h}} \tag{3.24}$$

D'autre part

$$mg = G\,\frac{mM}{r^2} \Longrightarrow g = G\,\frac{M}{r^2} = G\,\frac{M}{(R+h)^2} \tag{3.25}$$

$$\Longrightarrow g = G\frac{M}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \tag{3.26}$$

Avec

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \tag{3.27}$$

g_0 est l'accélération de m à la surface de M ($h = 0$)

Des équations 3.24 et 3.26 on a

$$\frac{v^2}{R+h} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \tag{3.28}$$

$$\frac{v^2}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}} \tag{3.29}$$

La période T est donnée par

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{v} \tag{3.30}$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\frac{g_0 R}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}}} = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{Rg_0}\sqrt{R}} \tag{3.31}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi(r)^{3/2}}{R\sqrt{g_0}}} \tag{3.32}$$

Soient deux particules de masses m_1 et m_2 en orbite autour de M. T_1 et T_2 leurs périodes respectives.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi(r_1)^{3/2}}{\sqrt{Rg_0}\sqrt{R}}}{\frac{2\pi(r_2)^{3/2}}{\sqrt{Rg_0}\sqrt{R}}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} \tag{3.33}$$

3.1.7 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un mobile de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.34}$$

Si $\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{p} = \vec{0}$

Si $v =$ constante $\Longrightarrow p =$ constante

On voit bien que cette loi constitue un nouvel énoncé de la 1ère loi de Newton (principe d'inertie).

D'autre part on a :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}m\vec{a} \tag{3.35}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}} \tag{3.36}$$

Cette loi constitue l'expression du PFD généralisé (2ème loi de Newton généralisée)

3.1.8 Conservation de la quantité de mouvement

Dans le cas d'un système à plusieurs particules

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i \tag{3.37}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... \tag{3.38}$$

Plaçons-nous dans le cas de deux particules de masses m_1 et m_2 animées des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. On considère le système ainsi formé est isolé.

$\vec{F}_{1/2}$: force exercée par 1 sur 2.

$\vec{F}_{2/1}$ force exercée par 2 sur 1.

Soient $\vec{v}_1(t)$, $\vec{v}_2(t)$, $\vec{v}_1(t')$, $\vec{v}_2(t')$ les vitesses des particules aux instants t et t' de sorte que $t' - t = \Delta t > 0$.

$$\begin{cases} \Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1(t') - \vec{v}_1(t) \\ \Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2(t') - \vec{v}_2(t) \end{cases} \tag{3.39}$$

On a

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2 \tag{3.40}$$

Si les masses m_1 et m_2 sont constante on aura :

$$\Delta(m_1\vec{v}_1) = -\Delta(m_2\vec{v}_2) \tag{3.41}$$

Soit

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \tag{3.42}$$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0} \tag{3.43}$$

$$\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0} \tag{3.44}$$

$\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont les quantités de mouvement des particules 1 et 2.

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_t = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{t'} \tag{3.45}$$

$$\boxed{\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2} \tag{3.46}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \overrightarrow{Cte} \tag{3.47}$$

C'est le principe de conservation de la quantité de mouvement. La quantité de mouvement totale d'un système isolé est conservée.

$$\boxed{\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... = \overrightarrow{Cte}} \tag{3.48}$$

3.1.9 Exercices corrigés

Exercice 3.1

Une force $\vec{F} = (4t-2)\hat{x}$ est exercée sur une particule de masse $m = 2\,kg$. Déterminer :

(a) L'accélération a

(b) La vitesse v

(c) L'équation horaire $x(t)$

(d) La quantité de mouvement $\vec{P}$

Solution

(a) Détermination de l'accélération de la particule

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = ma \Longrightarrow \boxed{\text{a} = \frac{F}{m} = \frac{4t-2}{2} = 2t-1}$$

(b) Détermination de la vitesse de la particule

$$v = \int_0^t a dt = \int_0^t (2t-1)dt = t^2 - t$$

$$\boxed{v = t^2 - t}$$

(c) Détermination de l'équation horaire $x(t)$

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t (t^2 - t)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2}$$

(d) Quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = 2(t^2 - t)\ \hat{x}}$$

Exercice 3.2

Une force motrice $\vec{F}$ est exercée sur un véhicule de masse $m = 3600\ kg$. Du repos, elle acquiert une vitesse $v = 10\ m/s$ pendant $10\ s$ depuis la position de repos. Le coefficient de frottement des roues avec le sol est $\mu = 0.2$.

Déterminer l'intensité de la force des frottements ainsi que la force motrice $\vec{F}$.

Solution

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

La projection sur $(x'Ox)$ donne :

$$F = f_x + ma$$

La projection sur $(y'Oy)$ donne :

$$f_y = p = mg$$

$$\tan\theta = \frac{f_x}{f_y} = \mu \Longrightarrow f_x = \mu f_y$$

Donc

$$F = \mu\, f_y + m\,\frac{v}{t} = \mu\, mg + m\,\frac{v}{t}$$

$$F = m\left(\mu\, g + \frac{v}{t}\right) = 3600 \times (0.2 \times 10 + \frac{10}{10}) = 10800\ N$$

Force de frottement

$$f_x = f = \mu\, f_y = \mu P = \mu\, mg = 3600 \times 0.2 \times 10 = 7200\ N$$

CHAPITRE 4

TRAVAIL ET ÉNERGIE

4.1 Notion d'énergie

L'énergie est une grandeur physique qui se présente sous diverse forme (mécanique, électrique, thermique, ...). Elle caractérise la capacité de modifier un état physique. L'énergie passe d'une forme à une autre en restant constante si toutes les transformations sont considérées. Le passage d'une forme à une autre se fait par le travail. L'énergie ne peut être créer ni detruite, elle se transforme.

4.2 Travail d'une force

Soit une particule en deplacement sur une trajectoire (C) sous l'action d'une force $\vec{F}$. Il est important de noter que le point d'application de $\vec{F}$ décrit la même trajectoire (courbe orientée).

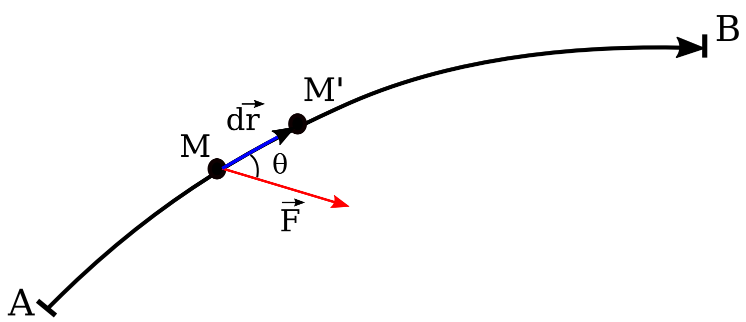

FIGURE 4.1 – Travail d'une force

Supposons que pendant un temps très court, la particule parcourt une distance $\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$. Le travail de la force $\vec{F}$ le long de la distance MM' est :

$$dW = \vec{F}\, d\vec{r} = F\; dr\; \cos\theta \tag{4.1}$$

Le travail effectué entre A et B est la somme des travaux élémentaires dW_1, dW_2 ...

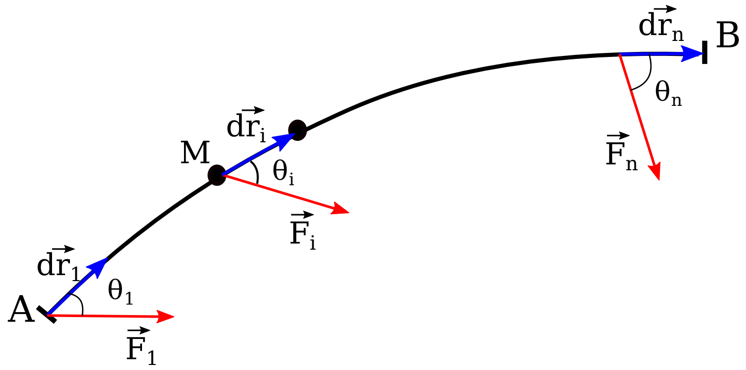

FIGURE 4.2 – Circulation d'une force sur un trajet et travail total

$$dW = dW_1 + dW_2 + ... + dW_i + ... + dW_n \tag{4.2}$$

$$dW = \vec{F}_1\, d\vec{r}_1 + \vec{F}_2\, d\vec{r}_2 + ... + \vec{F}_i\, d\vec{r}_i + ... + \vec{F}_n\, d\vec{r}_n \tag{4.3}$$

Si l'on suppose que la force $\vec{F}$ change de manière continue sur la trajectoire on aura

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = \sum_{dr_i \to 0} \vec{F}_i\, d\vec{r}_i = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\, d\vec{r} \tag{4.4}$$

Il est clair que $W_{\overset{\frown}{AB}}$ représente la circulation de $\vec{F}$ sur ce trajet. Le travail est donc une mesure de l'effet d'une force en deplacement.

Si $\overset{\frown}{AB} = \overrightarrow{AB}$ on aura

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{F}\, d\vec{r} \tag{4.5}$$

Si $\vec{F}$ est constante (norme, direction et sens) et $[AB]$ est un segement d'une droite, alors.

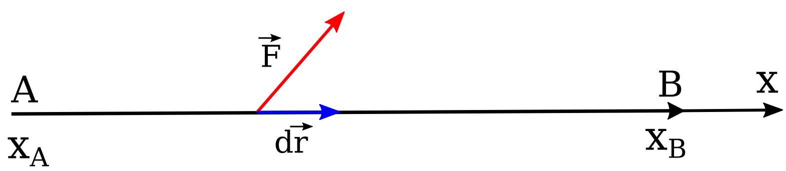

FIGURE 4.3 – Travail moteur et travail résistant

$$W = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}\, d\vec{r} == \int_{x_A}^{x_B} F\, dr \cos\theta \tag{4.6}$$

$$W = F\ \cos\theta \int_{x_A}^{x_B} dr = F\ \cos\theta \left[r\right]_{x_A}^{x_B} = F\ \cos\theta \left(x_B - x_A\right) = F\ \cos\theta\ AB = \vec{F}\ \overrightarrow{AB} \tag{4.7}$$

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow W00$

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow W > 0$ travail moteur

Si $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \Longrightarrow W < 0$ travail résistant

On a

$$\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} \tag{4.8}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \tag{4.9}$$

$$\boxed{\vec{F}\, d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz} \tag{4.10}$$

Exemple 4.1

Soit une corps de masse m dans une champ de gravitation.

$$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g} \tag{4.11}$$

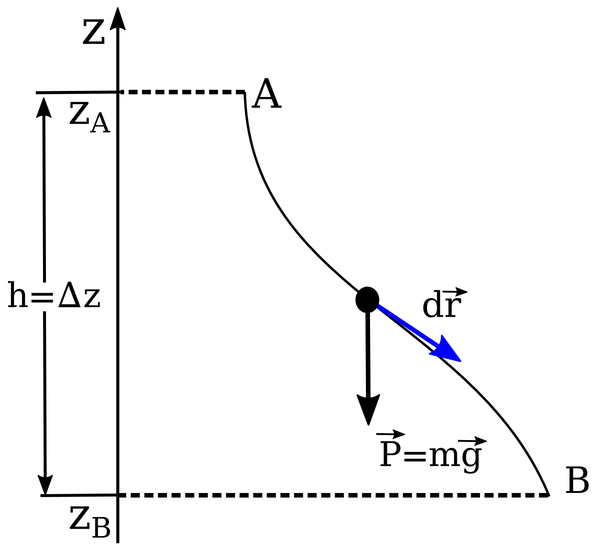

FIGURE 4.4 – Travail du poids

Solution

$$d\vec{r} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y} + dz\ \hat{z}, \qquad \vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{z} \tag{4.12}$$

$$\vec{F}\ d\vec{r} = \vec{P}\ d\vec{r} = -mgdz \tag{4.13}$$

$$W = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{P}\, d\vec{r} = -\int_{z_A}^{z_B} mgdz = -mg(z_B - z_A) \tag{4.14}$$

$$W = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{P}\, d\vec{r} = -\int_{z_A}^{z_B} mgdz = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B) = mg\Delta z \tag{4.15}$$

$$\boxed{W = mgh} \tag{4.16}$$

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais seulement de la variation de la hauteur entre les points de départ et d'arrivée.

4.3 Puissance

La puissance moyenne P_{moy} est le rapport du travail sur la durée de son accomplissment $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$P_{moy} = \frac{W_{\Delta t}}{\Delta t} \tag{4.17}$$

Puissance instantanée

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{4.18}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F}\, d\vec{r})}{dt} = \vec{F}\, \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\, \vec{v} \tag{4.19}$$

4.4 Energie cinétique, potentielle et mécanique

4.4.1 Energie cinétique

On a

$$dW = \vec{F}\, d\vec{r} = m\vec{a}\, d\vec{r} \tag{4.20}$$

$$= m\, \frac{d\vec{v}}{dt}\, \vec{v}\, dt \tag{4.21}$$

$$= m\, \vec{v}\, d\vec{v} \tag{4.22}$$

$$= m\, \frac{1}{2}\, d(\vec{v}\, \vec{v}) \tag{4.23}$$

$$\boxed{dW = d(\frac{1}{2}\, m\, v^2) = dE_c} \tag{4.24}$$

La quantité E_c est appelée énergie cinétique. Elle est due au mouvement du corps par rapport à un référentiel donné.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2)} \tag{4.25}$$

Si le mobile effectue un deplacement du point A au point B on aura

$$dW = dE_c \Longrightarrow \int_A^B dW = \int_A^B dE_c \tag{4.26}$$

$$W_{AB} = E_c(B) - E_c(A) \tag{4.27}$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2} \tag{4.28}$$

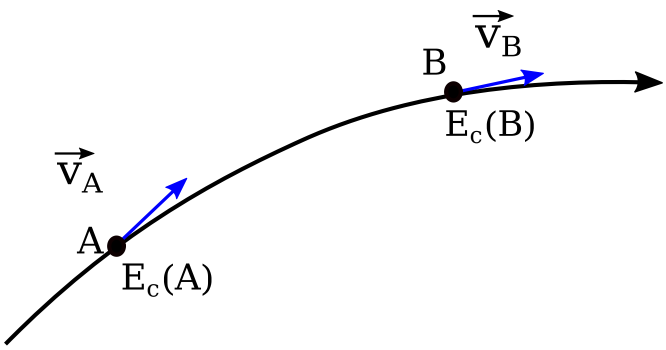

FIGURE 4.5 – Variation de l'énergie cinétique et travail des forces extérieurs

4.5 Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un mobile entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures s'éxerçant sur elle.

4.6 Energie potentielle

Avant de parler de l'énergie potentielle, il est impératif de savoir qu'une force $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$ est conservative si elle vérifie la condition :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \tag{4.29}$$

Ceci suggère l'existence d'une fonction scalaire telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \tag{4.30}$$

On peut vérifier que

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}E_p) = \vec{0} \tag{4.31}$$

Le travail de la force $\vec{F}$ est alors égal à

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\,d\vec{r} = -\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\nabla} E_p\,d\vec{r} = -\int_{\overset{\frown}{AB}} dE_p = -\Big[E_p\Big]_A^B = -\Delta E_p \tag{4.32}$$

$$\boxed{W_{\overset{\frown}{AB}} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p} \tag{4.33}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \tag{4.35}$$

$$W = -\Delta E_p \Longrightarrow dW = -dE_p \tag{4.36}$$

$$\vec{F}\,d\vec{r} = -dE_p \tag{4.37}$$

$$\boxed{dE_p = -\vec{F}\,d\vec{r}} \tag{4.38}$$

Le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi. Il dépend uniquement des énergies potentielles de départ et d'arrivée.

Exemple de force conservative : le poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{z} \tag{4.39}$$

$$dE_p = -\vec{P}\,d\vec{r} = -(-mg\hat{z})\;dz\;\hat{z} \tag{4.40}$$

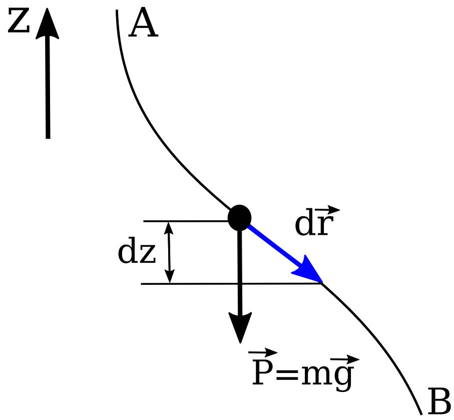

FIGURE 4.6 – Travail d'une force conservative

$$E_p = -\int (-mg\,\hat{z})\,dz\,\hat{z} \tag{4.41}$$

$$E_p = \int mg\,dz = mgz + E_p(0) \tag{4.42}$$

$E_p(0)$ est l'énergie potentielle choisie comme origine (de référence).

Cas du ressort

$$\vec{F} = -kx\,\hat{u}, \quad d\vec{r} = dx\,\hat{u} \tag{4.43}$$

$$E_p = -\int (-kx\,\hat{u})\,dx\,\hat{u} = \int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + E_p(0) \tag{4.44}$$

4.7 Energie mécanique

L'expression de l'énergie mécanique est

$$E_m = E_c + E_p \tag{4.45}$$

$$\Longrightarrow \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p \tag{4.46}$$

$\Delta E_c = \sum$ travaux des forces extérieures.
$\Delta E_p = -\sum$ travaux des forces conservatives.
$\Delta E_m = \sum$ travaux des forces non conservatives (frottements, chocs ...).

Exemple de forces non conservative : ***les forces de frottements***

$$\vec{F} = -k\,\vec{v} = -k\,v\,\hat{u}_t, \quad \hat{u}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.47}$$

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = -k\int_A^B v\, \hat{u}_t\, d\vec{r} = -k\int_A^B v\, ds \tag{4.48}$$

Si la force $\vec{F}$ est une constante on aura :

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = -F_0 \int_A^B ds = -F_0\, \overset{\frown}{AB} \tag{4.49}$$

$\overset{\frown}{AB}$ est la largeur de l'arc AB.

On voit bien que $W_{AB} < 0$ et dépend du chemin parcouru.

4.7.1 Exercices corrigés

Exercice 4.1

Sur la piste de la figure 4.8, une bille de masse assimilée à un point matériel est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A et parvient au point B avec une vitesse $v_B = 6\ m/s$. La différence d'altitudes entre A et B est $h = 2m$ On prendra $g = 10\ m/s$

(1) Montrer que le point matériel m est soumis à des forces de frottements.

(2) Calculer le travail de ces forces entre les points et si la masse est $m = 3\ kg$.

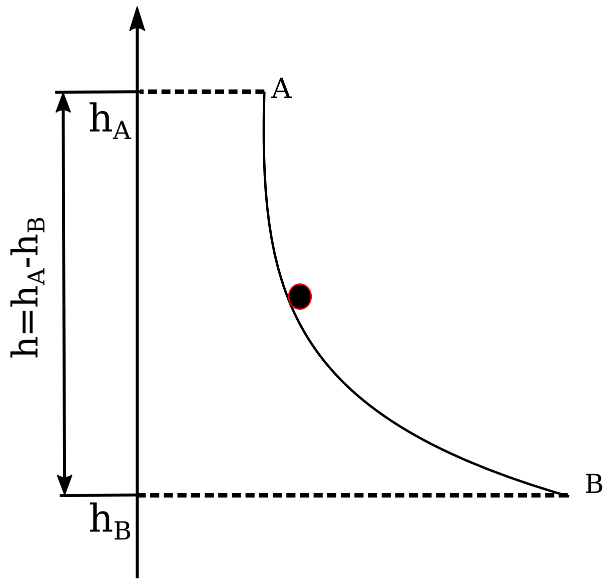

FIGURE 4.7 – Travail des forces de frottement

Solution

(1) Pour montrer que le point matériel est soumis à des forces de frottements, il faut calculer la variation de l'énergie cinétique ΔE_m.

D'après l'équation 4.46 on a :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_c =$$

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 == \frac{1}{2}\, m\, (v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}\, m \times (6^2 - 0^2) = 18m$$

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_c(A) = mg\, h_B - mg\, h_A = mg\, (h_B - h_A) = m \times 10 \times (-2) = -20m$$

Donc

$$\Delta E_m = 18m - 20m = -2m =$$

(2) Le travail des forces de frottement entre A et B

$$\Delta E_m = W_{\overset{\frown}{AB}} = 18m - 20m = -2m = -2 \times 3 = -6\ Joule$$

Exercice 4.2

un objet de masse m se déplace sur une droite $x'Ox$ sous l'action d'un ressort. La force exercée sur m due au ressort s'écrit :

$$\vec{F} - kx\ \hat{x}$$

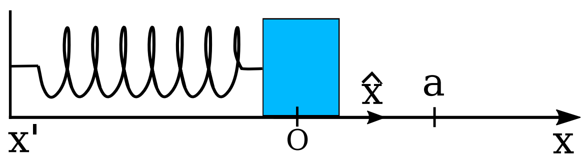

FIGURE 4.8 – Travail de la force de rappel

k est la constante de réideur du ressort.

(1) Qu'indique le signe moins dans l'expression $\vec{F}$. Expliquer avec un schéma.

(2) Vérifier que dérive $\vec{F}$ d'une énergie potentielle.

(3) Si on écarte m de sa position d'équilibre (origine de l'axe,$x = 0$) jusqu'au point $x = 0$ et on l'abandonne, elle subit l'action de la force $\vec{F}$. en négligeant les frottements, tracer l'évolution de l'énergie cinetique (E_c), e l'énergie cinetique (E_p) et de l'énergie totale (E_T) en fonction de$x$ sur le même graphe. Justifier l'allure des courbes.

Solution

(1) Le signe $(-)$ dans l'expression de la force $\vec{F}$ indique qu'elle s'agit d'une force de rappel s'opposant au deplacement de la masse m.

(2) Pour vérifier que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle, il faut calculer de travail de cette force pour un deplacement quelconque entre A et B et voir s'il dépend du chemin suivi.

On a

$$\begin{cases} \vec{F} = -kx\,\hat{x} \\ d\vec{\ell} = dx\,\hat{x} \end{cases}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{\ell} = -k\int_{x_A}^{x_B} x\,dx$$

$$W_{AB} = -k\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x_A}^{x_B}$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_B^2}$$

On constate que le travail W_{AB} s'exprime comme la différence d'une même fonction exprimée en A et en B. Cette quantité est l'énergie potentielle E_p.

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta E_p}$$

En un point x quelconque

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 + Cte$$

Si pour $x = 0, E_p = 0 \Longrightarrow Cte = 0$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Donc la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,\hat{x} = -kx\,\hat{x}$$

(3)

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mx^2$$

La force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentille et les forces de frottement sont négligées.

Théorème de l'énergie cinétique stipule que

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \Longrightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Longrightarrow \Delta E_T = 0$$

L'énergie totale est donc conservée

$$E_T = E_c + E_p = Cte$$

Les maximas de E_p *sont situés en* $x = \pm a$ *et* $E_p = 0$ *en* $x = 0$.
E_c *est nulle en* $x = \pm a$ *et le maximum de* E_c *est en* $x = 0$.

Exercices supplémentaires

4.8 Exercices chapitre 1

Exercice 1.1

Dans un repère orthonormé direct $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, on considère les trois vecteurs suivants :

$$\vec{a} = -2\hat{x} + 3\hat{y} + \alpha\hat{z}$$
$$\vec{b} = 6\hat{x} - \beta\hat{y} + 3\hat{z}$$
$$\vec{c} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$$

(a) Pour quelles valeurs de α et β les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, sont-ils colinéaires ?

(b) Calculer les normes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ainsi que des associations ($\vec{a}$ + $\vec{b}$), ($\vec{a}$ - $\vec{b}$), ($\vec{a}$ + $\vec{c}$) et ($\vec{a}$ - $\vec{c}$). On exprimera les résultats en fonction du facteur numérique $\sqrt{14}$.

(c) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{d}$ vérifiant la relation : $2\vec{a} + \vec{b}\ /3 - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

Exercice 1.2

Dans un repère orthonormé direct $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, nous avons les trois points : A $(2, 3, 1)$, B $(3, -2, 1)$, et C $(1, 3, -2)$.

(a) Déterminer les composantes et les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

(b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AC}$

(c) Déterminer en degrés l'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Exercice 1.3

Dans un repère orthonormé direct $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, nous avons les deux vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} = \hat{x} - 5\hat{y} + 0\hat{z}$$
$$\overrightarrow{AC} = -\hat{x} + 0\hat{y} - 3\hat{z}$$

(a) Calculer analytiquement le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

(b) En déduire l'aire S du triangle ABC.

(c)Déterminer en degrés l'angle α =($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$)

Exercice 1.4

(1) Déterminer les coordonnées polaires des points A et B dont les coordonnées cartésiennes à deux dimensions sont : A $(1, 2)$, B $(-4, 3)$.

(2) Déterminer les coordonnées cylindriques et sphériques des points de coordonnées cartésiennes à trois dimensions : C $(3, 4, 5)$, D $(2, -3, 1)$.

Exercice 1.5

L'espace est orienté par le repère orthonormé direct O, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$), on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$$

$$\vec{b} = 0\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$$

$$\vec{c} = 3\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

(a) Calculer : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ et $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. Conclure

(b) Vérifier la relation du double produit vectoriel : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \,.\, \vec{c}) \,.\, \vec{b} - (\vec{a} \,.\, \vec{b}) \,.\, \vec{c}$

Exercice 1.6

L'espace est orienté par le repère orthonormé direct O, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$), on donne les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = 1\hat{x} - 5\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\hat{x} + 0\hat{y} - 3\hat{z}$$

$$\overrightarrow{AD} = -3\hat{x} - 5\hat{y} - 4\hat{z}$$

(a) Définir le produit mixte$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de deux façons différentes.

(b) Calculer la valeur du produit mixte $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

(c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 1.7

Calculer le gradient et le laplacien des champs scalaires suivants :

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(c) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

(d) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$.

Exercice 1.8

Calculer la divergence et le rotationnel des champs vectoriels suivants :
(a) $\vec{v}_1(x,y,z) = x^2\ \hat{x} + 3xz^2\ \hat{y} - 2xz\ \hat{z}$
(b) $\vec{v}_2(x,y,z) = xy\ \hat{x} + 2yz\ \hat{y} + 3zx\ \hat{z}$
(c) $\vec{v}_3(x,y,z) = y^2\ \hat{x} + (3xy + z^2)\ \hat{y} + 2yz\ \hat{z}$

Exercice 1.9

(a) Calculer le gradient du champ scalaire $v(r,\theta) = G.\frac{\cos\theta}{r}$, où G est une constante physique.
(b) Calculer la divergence des champs vectoriels $\vec{v}_1 = r^2\ \hat{e}_r$ et $\vec{v}_2 = \frac{1}{r^2}\ \hat{e}_r$.

Exercice 1.10

Soit l'équation physique suivante :

$$v = ax^2 + bx + c\sqrt{2 + \frac{ax}{d}}$$

ou v est une vitesse et x est une distance.

Ecrire les équations aux dimensions puis donner les unités dans le système SI des constantes physiques a, b, c, et d.

Exercice 1.11

Un satellite est en orbite circulaire de rayon R_J autour de Jupiter de masse M_J. Sachant que la constante de gravitation universelle G a pour dimension $M^{-1}L^3T^{-2}$, quelle est la période de révolution T_0 du sétellite autour de Jupiter ?

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{GM_J}{R_J}}$ ou $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{GM_J}{R_J^3}}$ ou $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_J^3}{GM_J}}$

Exercice 1.12

Ecrire les équations aux dimensions des grandeurs dérivées suivantes :
Champ électrique $\vec{E}$, champ magnétique $\vec{B}$, force de Lorentz (électromagnétique) $\vec{F}$, constante des gaz parfaits R, puissance électrique P_e, puissance mécanique P_m, énergie électromagnétique E_{em}, énergie cinétique E_c, quantité de mouvement $\vec{p}$.

Exercice 1.13

Pour calculer l'accélération terrestre g à l'aide d'un pendule, on mesure la longueur du pendule l $(1.552 \pm 0.002\ m)$ ainsi que sa période d'oscillation T $(2.50 \pm 0.02\ s)$, et on utilise la loi suivante :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Calculer g avec son incertitude relative et son incertitude absolue.

NB. Utiliser la méthode de la différentielle totale exacte puis celle de la dérivée de la fonction logarithme népérien.

4.9 Exercices chapitre 2

Exercice 2.1

Deux trains A et B roulent sur des voies parallèles respectivement à 70 km/h et 90 km/h.

Calculer la vitesse relative de B par rapport à A quand :

- Ils se déplacent dans le même sens

- Ils se déplacent dans des sens opposés.

Exercice 2.2

Un mobile M est assujetti à se déplacer sur une droite $X'X$. Son accélération est constante. À l'instant t_1 = 2 sec, il se trouve au point d'abscisse x_1 = 5 cm et animé d'une vitesse v_1 = 4 cm/s. A l'instant t_2 = 5 sec, il se trouve au point d'abscisse x_2 = 35 cm et est animé d'une vitesse v_2 = 16 cm/s.

(a) Déterminer l'accélération du mouvement, la vitesse et l'abscisse à l'instant initial. Ecrire l'équation du mouvement.

(b) Déterminer l'instant ou le mobile change de sens. Quelle est alors sa position.

(c) Un second mobile M' se déplace sur la même droite muni d'un mouvement uniforme. Aux instants t_1 = 2 sec et t_2 = 5 sec, il se trouve en des points d'abscisses respectives x'_1 = 71 cm et x'_2 = 57.5 cm. Déterminer l'équation horaire du mouvement de M'.

(d) A quel instant les deux mobiles M et M' se croisent-ils ?

Exercice 2.3

Les coordonnées d'un point matériel M dans un repère OXYZ sont données par :

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\phi \\ z = h\phi \end{cases}$$

où R et h sont des constantes et ϕ l'angle que fait la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur le plan XOY et l'axe OX.

(a) Déterminer, en coordonnées cylindriques, les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération.

(b) Quel est l'angle que fait le vecteur vitesse avec le plan XOY.

(c) Si $\dot{\theta}$ est constante, calculer les composantes normales et tangentielles de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 2.4

Un point matériel M est en mouvement sur la surface d'une sphère de rayon R. Le vecteur position fait un angle $\theta = 30^0$ avec l'axe Oz. Le vecteur projection de la position fait un angle $\phi = at^2$ avec l'axe Ox.

(a) Calculer la vitesse et l'accélération du mobile M en coordonnées sphériques.

(b) Déterminer la trajectoire et la nature du mouvement.

Exercice 2.5

Le repère orthonormé (O, xyz) de base orthonormée $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ est fixe (repère absolu). Le repère $(O, x_1y_1z_1)$ de base $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, est orthonormé, direct et en mouvement par rapport au repère absolu dans les conditions suivantes :

$\overrightarrow{OO'} = r\hat{x}$

$(\hat{x}, \hat{e}_1) = \theta$

$\hat{z} = \hat{e}_3$

Un point matériel M est mobile par rapport à $(O, x_1y_1z_1)$. Ses coordonnées x_1, y_1 et z_1, en fonction du temps, s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = 2t \\ z_1 = 5t^2 \end{cases}$$

(a) Que peut-on dire de la trajectoire de M ?

(b) Exprimer le vecteur vitesse absolue dans le repère mobile.

(c) Dans le cas ou $\dot{\theta} = \omega$ est constante, calculer le vecteur accélération absolue de M dans le repère mobile.

Exercice 2.6

Un point matériel M, en mouvement dans un plan, est repéré par ses coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ telles que :

$$\begin{cases} \rho(t) = r_0(1 + \cos(\omega t)) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0 et ω sont des constantes positives.

(a) Trouver l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature ? Représenter cette trajectoire.

(b) Donner, en coordonnées polaires, les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération.

(c) Déterminer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire à $t = \frac{\pi}{\omega}$

4.10 Exercices chapitre 3

Exercice 3.1

Sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^o$ avec l'horizontale, on pose une boîte de masse $m = 8\ kg$. Les coefficients de frottemnt statique et dynamique sont respectivement $\mu_s = 0.2$ et $\mu_c = 0.1$. On prendra $g = \ 10\ m/s$.

(1) On maintient la boîte en équilibre en appliquant sur elle une force $\vec{F}$.

(a) Calculer la valeur minimake de F nécessaire pour empêcher la boîte de glisser vers le bas.

(b) Calculer la valeur maximale de F qu'on peut appliquer à la boîte sans enclencher son mouvement vers le haut.

(2) Préciser le sens du déplacement quand il a lieu et calculer l'accélération correspondante pour chacune des valeurs suivantes de F :

(a) $F_1 = 20\ N$, (b) $F_2 = 40\ N$ et (b) $F_3 = 60\ N$.

On supposera que la boîte est initialement immobile pour chacune de ces valeurs.

Exercice 3.2

Un solide S glisse le long d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^o$ avec l'horizontale. On prendra $g = \ 10\ m/s$.

(1) Le solide S est abandonné depuis le point A sans vitesse initiale. En considérant les frottements négligeable.

(a) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ du solide S.

(b) Quelle est la nature du mouvement.

(c) Calculer le temps t_{AB} mis par la masse pour arriver au point B si $AB = 2.5M$.

(2) En admettant l'existence des frottements caractérisés par le coefficient de frottement μ_c

(a) Représenter les forces s'exerçant sur S

(a) Déduire la valeur de ce coefficient de frottement, μ_c si $tAB = 1.2s$

On supposera que la boîte est initialement immobile pour chacune de ces valeurs.

(3) Le solide est maintenant lancé du point vers le haut. Déterminer l'accélération du solide S si le coefficient de frottement est $\mu_c = 0.11$.

4.11 Exercices chapitre 4

Exercice 4.1

Soit une particule se trouvant dans le champ de force suivant :

$$\overrightarrow{F} = (A-2)y\,\hat{x} + (b+1)x\,\hat{y}$$

(1) Déterminer la relation que vérifie a et b pour que $\overrightarrow{F}$ soit une force conservative.

(2) Dans la suite de l'exercice, on prendra $a = 1$ et $\overrightarrow{F}$ reste une force conservative.

Calculer le travail W de $\overrightarrow{F}$ du point $A(1,0)$ au point $B(2,1)$ le long des chemins suivants :

(a) Chemin 1 : $A \longrightarrow C \longrightarrow D$

(b) Chemin 2 : $A \longrightarrow B \longrightarrow D$

(c) Chemin 3 : Chemin direct $A \longrightarrow D$

1) Déterminer l'énergie potentielle E_p dont dérive $\overrightarrow{F}$.

(2) Calculer $E_p(A) - E_p(B)$. La comparer avec $W(\overrightarrow{F})$ de A à D. Conclure.

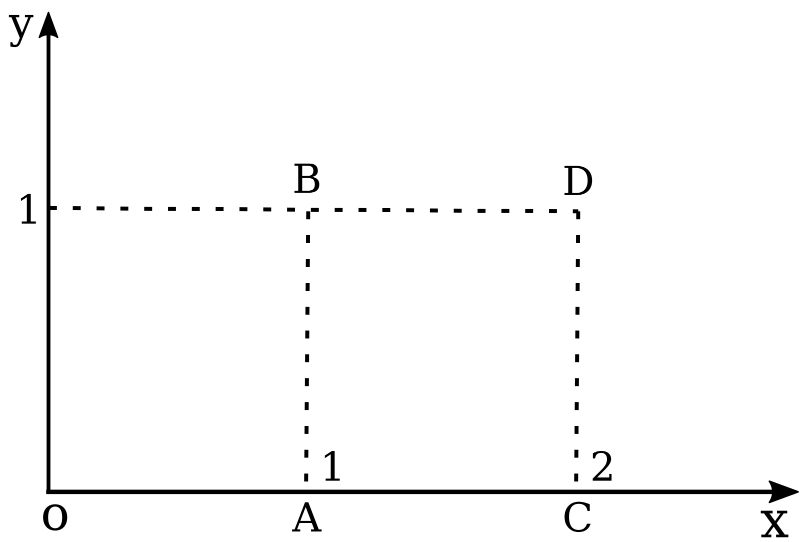

FIGURE 4.9 – Circulation d'une force conservative

Bibliographie

[1] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Boston : Pearson, 4 ed., 2013.

[2] M. R. Spiegel, *Théorie et applications de la mécanique générale*. Schaum, McGraw-Hill, 1983.

[3] J. R. Taylor, *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques, avec exercices corrigés*. Dunod, 2000.

[4] J. I. Queyrel and J. Mesplede, *Précis de physique, Mécanique 1 cours etexercices résolus*. Bréal, 1990.

[5] B. Belache, *Mécanique du point matériel : cours et exercices résolus*. Université de Bejaia, 2018.

[6] J. M. Finn, *Classical mechanics*. Infinity Science Press LLC, 2008.

[7] H. D. Young and R. A. Freedman, *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics Technology Update*. Pearson, 2014.

[8] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical machanics*. Springer-Verlag, 1974.

[9] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addition Wesley, 2002.