# Calculs d'intégrales

Fiche d'Arnaud Bodin, soigneusement relue par Chafiq Benhida

## 1 Utilisation de la définition

### Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que $F$ est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction $F$ est-elle dérivable sur $[0,4]$ ?

Correction ▼ Vidéo ■ [002081]

### Exercice 2

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002082]

### Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : «si $f$ est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f$ est identiquement nulle».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que $f$ est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002085]

### Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f$.

3. Si $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ alors $F$ est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ alors $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si $f$ est $T$-périodique sur $\mathbb{R}$ alors $F$ est $T$-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si $f$ est paire alors $F$ est impaire.

Correction ▼ Vidéo ■ [002091]

## 2 Calculs de primitives

**Exercice 5**

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006864]

**Exercice 6**

Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$
2. $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006865]

**Exercice 7**

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} \, dx$
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} \, dx$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x \, dx$
4. $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} \, dx$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006866]

## 3 Calculs d'intégrales

**Exercice 8**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$ (changement de variable $x = \tan t$)

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$ (décomposition en éléments simples)
5. $\int_{\frac12}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ (changement de variable $u=\frac{1}{x}$)

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006867]

### Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002095]

### Exercice 10 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$. Expliciter $I_n$. En déduire $\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^n dx$.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$
3. Simplifier $I_n\cdot I_{n+1}$. Montrer que $I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002096]

### Exercice 11

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002097]

## 4 Applications : calculs d'aires, calculs de limites

### Exercice 12

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y=\dfrac{x^2}{2}$ et $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002099]

### Exercice 13

Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

*Indications.* On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Puis exprimer $y$ en fonction de $x$. Enfin calculer une intégrale.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006863]

### Exercice 14

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$
2. $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002100]

## Indication pour l'exercice 2 ▲

Les fonctions continues ne seraient-elles pas intégrables ?

Il faut se souvenir de ce que vaut la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme d'une suite géométrique. La formule générale pour les sommes de Riemann est que $\int_a^b f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

## Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Revenir à la définition de la continuité en $x_0$ en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ par exemple.
2. Soit $f$ est tout le temps de même signe (et alors utiliser la première question), soit ce n'est pas le cas (et alors utiliser un théorème classique...).
3. On remarquera que $\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 (f(x)-x)dx$.

## Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Pour $\int x^2 \ln x\,dx$ poser $v' = x^2$, $u = \ln x$.
2. Pour $\int x \arctan x\,dx$ poser $v' = x$ et $u = \arctan x$.
3. Pour les deux il faut faire une intégration par parties avec $v' = 1$.
4. Pour $\int \cos x \exp x\,dx$ il faut faire deux intégrations par parties.

## Indication pour l'exercice 6 ▲

1. $\int \cos^{1234} x \sin x\,dx = -\frac{1}{1235}\cos^{1235} x + c$ (changement de variable $u = \cos x$)
2. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c$ (changement de variable $u = \ln x$)
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$ (changement de variable $u = \exp x$)
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ (changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$)

## Indication pour l'exercice 7 ▲

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$ (décomposition en éléments simples)
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$
4. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$)
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|2-\sin x| + \frac{7}{5}\ln|1+2\sin x| + c$ (changement de variable $u = \sin x$)

## Indication pour l'exercice 8 ▲

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = 1$ (intégration par parties $v' = \sin x$, $u = x$)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$ (à l'aide du changement de variable $u = e^x$)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ (changement de variable $x = \tan t$, $dx = (1+\tan^2 t)dt$ et $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx = 3\ln 2 - 1$ (décomposition en éléments simples de la forme $\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}$)

5. $\int_{\frac12}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx=\frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u=\frac1x$ et $\arctan x+\arctan\frac1x=\pm\frac{\pi}{2}$)

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx=1$ (changement de variables $t=\tan\frac{x}{2}$).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}-1$ (utiliser la précédente).

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

1. Faire une intégration par parties afin d'exprimer $I_{n+2}$ en fonction de $I_n$. Pour le calcul explicite on distinguera le cas des $n$ pairs et impairs.
2. Rappel : $u_n\sim v_n$ est équivalent à $\frac{u_n}{v_n}\to1$. Utiliser la décroissance de $I_n$ pour encadrer $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

1. Majorer par $x^n$.
2.
3. On pourra calculer $(I_0+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-\cdots$

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Un dessin ne fait pas de mal ! Il faut ensuite résoudre l'équation $\frac{x^2}{2}=\frac{1}{x^2+1}$ puis calculer deux intégrales.

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Il faut se ramener au calcul de $\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$.

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

On pourra essayer de reconnaître des sommes de Riemann, puis calculer des intégrales. Pour le produit composer par la fonction ln, afin de transformer le produit en une somme.

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. On trouve $\int_0^4 f(t)\,dt = +7$. Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x=0$, $x=1$, $x=2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale. Ensuite on revient à la définition de $\int_0^4 f(t)\,dt$ : pour la subdivision de $[0,4]$ définie par $\{x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4\}$, on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteints et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine). Une autre façon de faire est considérer que $f$ est une fonction en escalier (en «oubliant» les accidents en $x=0$, $x=1$, $x=2$) dont on sait calculer l'intégrale.
2. C'est la même chose pour $\int_0^x f(t)\,dt$, mais au lieu d'aller jusqu'à 4 on s'arrête à $x$, on trouve
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3-2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4x-9 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$
3. Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points $x=1$ et $x=2$, mais les limites à droite et à gauche de $F$ sont égales en ces points donc $F$ est continue. Par contre $F$ n'est pas dérivable en $x=1$ (les dérivées à droite et à gauche sont distinctes), $F$ n'est pas non plus dérivable en $x=2$.

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

Les fonctions sont continues donc intégrables !

1. En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Notons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$. On a utilisé que la somme des entiers de 0 à $n-1$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Donc $S_n$ tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.
2. Même travail : $\int_1^2 g(x)dx$ est la limite de $S'_n = \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+k\frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})$. En séparant la somme en trois nous obtenons : $S'_n = \frac{1}{n}(n+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Donc à la limite on trouve $S'_n \to 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Donc $\int_1^2 g(x)dx = 7/3$. Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.
3. Même chose pour $\int_0^x h(t)dt$ qui est la limite de $S''_n = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{x}{n}})^k$. Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique (si $x \neq 0$), donc $S''_n = \frac{x}{n}\frac{1-(e^{\frac{x}{n}})^n}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n}\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}} = (1-e^x)\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ qui tend vers $e^x-1$. Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u = \frac{x}{n}$ on a $\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}} = -1/\frac{e^u-1}{u}$ qui tend vers $-1$ lorsque $u \to 0$ (ce qui est équivalent à $n \to +\infty$).

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

1. Écrivons la continuité de $f$ en $x_0$ avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ on ait $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Avec notre choix de $\varepsilon$ cela donne pour $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ que $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$. Pour évaluer $\int_a^b f(x)\,dx$ nous la coupons en trois morceaux par linéarité de l'intégrale :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx.$$
Comme $f$ est positive alors par positivité de l'intégrale $\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geqslant 0$ et $\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geqslant 0$. Pour le terme du milieu on a $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ donc $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}dx = 2\delta\frac{f(x_0)}{2}$ (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 2\delta\frac{f(x_0)}{2} > 0$.
Donc pour une fonction continue et positive $f$, si elle est strictement positive en un point alors $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Par contraposition pour une fonction continue et positive si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors $f$ est identiquement nulle.

2. Soit $f$ est tout le temps positive, soit elle tout le temps négative, soit elle change (au moins un fois) de signe. Dans le premier cas $f$ est identiquement nulle par la première question, dans le second cas c'est pareil (en appliquant la première question à $-f$). Pour le troisième cas le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $c$ tel que $f(c) = 0$.
3. Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \big(f(x) - x\big)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = 0$. Donc par la question précédente, $g$ étant continue, il existe $d \in [0,1]$ tel que $g(d) = 0$, ce qui est équivalent à $f(d) = d$.

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x$ alors $F$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Faux. Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x^2$ alors $F$ est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.
5. Vrai.
6. Faux. Faire le calcul avec la fonction $f(x) = 1 + \sin(x)$ par exemple.
7. Vrai.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

1. $\int x^2 \ln x\, dx$
Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$. On a donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int \ln x \times x^2\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\, dx \\
&= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3}\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c
\end{aligned}$$

2. $\int x \arctan x\, dx$
Considérons l'intégration par parties avec $u = \arctan x$ et $v' = x$. On a donc $u' = \frac{1}{1+x^2}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \times x\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2}\, dx \\
&= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + c \\
&= \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan x - \frac{1}{2} x + c
\end{aligned}$$

3. $\int \ln x\,dx$ puis $\int (\ln x)^2\,dx$
Pour la primitive $\int \ln x\,dx$, regardons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = 1$. Donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x\,dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + c\end{aligned}$$

Par la primitive $\int (\ln x)^2\,dx$ soit l'intégration par parties définie par $u = (\ln x)^2$ et $v' = 1$. Donc $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[x(\ln x)^2\right] - 2\int \ln x\,dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la primitive calculée précédemment.

4. Notons $I = \int \cos x \exp x\,dx$.
Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \cos x$. Alors $u' = \exp x$ et $v = \sin x$.
Donc

$$I = \int \cos x \exp x\,dx = \left[\sin x \exp x\right] - \int \sin x \exp x\,dx$$

Si l'on note $J = \int \sin x \exp x\,dx$, alors on a obtenu

$$I = \left[\sin x \exp x\right] - J \tag{1}$$

Pour calculer $J$ on refait une deuxième intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \sin x$. Ce qui donne

$$J = \int \sin x \exp x\,dx = \left[-\cos x \exp x\right] - \int -\cos x \exp x\,dx = \left[-\cos x \exp x\right] + I$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$J = \left[-\cos x \exp x\right] + I \tag{2}$$

Repartons de l'équation (1) dans laquelle on remplace $J$ par la formule obtenue dans l'équation (2).

$$I = \left[\sin x \exp x\right] - J = \left[\sin x \exp x\right] - \left[-\cos x \exp x\right] - I$$

D'où

$$2I = \left[\sin x \exp x\right] + \left[\cos x \exp x\right]$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\exp x + c.$$

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

---

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$
   En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a $x = \arccos u$ et $du = -\sin x \, dx$ et on obtient
   $$\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx = \int u^{1234} (-du) = -\frac{1}{1235} u^{1235} + c = -\frac{1}{1235} (\cos x)^{1235} + c$$
   Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
   En posant le changement de variable $u = \ln x$ on a $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$ on écrit :
   $$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |\ln x| + c$$
   Cette primitive est définie sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$
   Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x \, dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.
   $$\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1} du = \frac{1}{3} \ln |3u+1| + c = \frac{1}{3} \ln (3 \exp x + 1) + c$$
   Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$
   Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est
   $$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + c,$$
   car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$ c'est $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On va donc essayer de s'y ramener. Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x-x^2$ sous la forme $1-t^2$ : $4x-x^2 = 4-(x-2)^2 = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\right)$. Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \frac{1}{2}x-1$ pour lequel $4x-x^2 = 4(1-u^2)$ et $dx = 2du$.
   $$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}} 2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right) + c$$
   La fonction $\arcsin u$ est définie et dérivable pour $u \in ]-1,1[$ alors cette primitive est définie sur $x \in ]0,4[$.

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$
   Pour calculer cette intégrale on décompose la fraction $\frac{x+2}{x^2-3x-4}$ en éléments simples, le dénominateur n'étant pas irréductible. On sait que cette fraction rationnelle se décompose avec des dénominateurs de degré 1 et des constantes aux numérateurs :
   $$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4}$$
   Il ne reste plus qu'à calculer $\alpha$ et $\beta$ à l'aide de votre méthode favorite :
   $$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{6}{5}}{x-4}$$
   Chacune de ces fractions est du type $\frac{1}{u}$ qui s'intègre en $\ln |u|$, d'où :
   $$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{6}{5} \int \frac{1}{x-4} dx = -\frac{1}{5} \ln |x+1| + \frac{6}{5} \ln |x-4| + c$$
   Cette primitive est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,4\}$

2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$
Le dénominateur $u = x^2+x+1$ est irréductible, la fraction est donc déjà décomposée en éléments simples. On fait apparaître artificiellement une fraction du type $\frac{u'}{u}$ qui s'intégrera à l'aide du logarithme :

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

Chacune de ces fractions s'intègre, la première est du type $\frac{u'}{u}$ dont une primitive sera $\ln|u|$, la deuxième sera du type $\frac{1}{1+v^2}$ dont une primitive est $\arctan v$.
En détails cela donne :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\big[\ln|x^2+x+1|\big] - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\big[\ln|x^2+x+1|\big] - 2\int \frac{1}{1+v^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}dv \quad \text{en posant } v = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\big[\ln|x^2+x+1|\big] - \sqrt{3}\big[\arctan v\big] \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c
\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

3. $\int \sin^8 x \cos^3 x\,dx$
Lorsque l'on a une fonction qui s'exprime comme un polynôme (ou une fraction rationnelle), on peut tester un des changements de variable $u = \cos x$, $u = \sin x$ ou $u = \tan x$. Soit vous essayez les trois, soit vous appliquez les règles de Bioche. Ici, si l'on change $x$ en $\pi - x$ alors $\sin^8 x \cos^3 x\,dx$ devient $\sin^8(\pi-x)\cos^3(\pi-x)\,d(\pi-x) = \sin^8 x(-\cos^3 x)(-dx) = \sin^8 x \cos^3 x\,dx$. Donc le changement de variable adéquat est $u = \sin x$.
Posons $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^8 x \cos^3 x\,dx &= \int \sin^8 x \cos^2 x(\cos x\,dx) = \int \sin^8 x(1-\sin^2 x)(\cos x\,dx) \\
&= \int u^8(1-u^2)du = \int u^8\,du - \int u^{10}\,du \\
&= \big[\tfrac{1}{9}u^9\big] - \big[\tfrac{1}{11}u^{11}\big] = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c
\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

4. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$
Comme $\frac{1}{\sin(-x)}(-dx) = \frac{1}{\sin x}\,dx$ la règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \cos x$. Donc $du = -\sin x\,dx$.
Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{-1}{\sin^2 x}(-\sin x\,dx) \\
&= \int \frac{-1}{1-\cos^2 x}(-\sin x\,dx) \\
&= -\int \frac{1}{1-u^2}\,du
\end{aligned}$$

On décompose cette fraction en éléments simples : $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln|1+u|\right] - \frac{1}{2}\left[\ln|1-u|\right] \\ &= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| + c\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur tout intervalle du type $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$. Elle peut se réécrire sous différentes formes :

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

Un autre changement de variable possible aurait été $t = \tan\frac{x}{2}$.

5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}\,dx$

La règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\,dx &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\frac{1}{\cos x}(\cos x\,dx) \\ &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos^2 x + 3\sin x}(\cos x\,dx) \\ &= \int \frac{3-\sin x}{2-2\sin^2 x+3\sin x}(\cos x\,dx) \\ &= \int \frac{3-u}{2-2u^2+3u}\,du\end{aligned}$$

Occupons nous de la fraction que l'on réduit en éléments simples :

$$\frac{3-u}{2-2u^2+3u} = \frac{u-3}{(u-2)(2u+1)} = \frac{\alpha}{u-2} + \frac{\beta}{2u+1}$$

On trouve $\alpha = -\frac{1}{5}$ et $\beta = \frac{7}{5}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\,dx &= \int \frac{\alpha\,du}{u-2} + \int \frac{\beta\,du}{2u+1} \\ &= \alpha\ln|u-2| + \beta\ln|2u+1| + c \\ &= -\frac{1}{5}\ln|2-\sin x| + \frac{7}{5}\ln|1+2\sin x| + c\end{aligned}$$

Cette primitive est définie pour les $x$ vérifiant $1+2\sin x > 0$ donc sur tout intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

## Correction de l'exercice 8 ▲

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

Par intégration par parties avec $u = x$, $v' = \sin x$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx &= \big[uv\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \\
&= \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
&= \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0 - 0 \quad + \quad 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$
   Posons le changement de variable $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x \, dx$. La variable $x$ varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^x \, dx}{\sqrt{e^x+1}} \, dx &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\
&= \big[2\sqrt{u+1}\big]_1^e \\
&= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$
   Posons le changement de variable $x = \tan t$, alors on a $dx = (1+\tan^2 t)dt$, $t = \arctan x$ et on sait aussi que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Comme $x$ varie de $x = 0$ à $x = 1$ alors $t$ doit varier de $t = \arctan 0 = 0$ à $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1) \, dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} \, dx$
   Commençons par décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

   où l'on a trouvé $\alpha = 3$ et $\beta = -2$. La première est une intégrale du type $\int \frac{1}{u} = [\ln |u|]$ et la seconde $\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\\ &= 3\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - 2\Big[-\frac{1}{x+1}\Big]_0^1\\ &= 3\ln 2 - 0 \quad + \quad 1-2\\ &= 3\ln 2 - 1\end{aligned}$$

5. Notons $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$.
Posons le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et on a $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$. Alors $x$ variant de $x = \frac{1}{2}$ à $x = 2$, $u$ varie lui de $u = 2$ à $u = \frac{1}{2}$ (l'ordre est important !).

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx\\ &= \int_{2}^{\frac{1}{2}} (1+u^2)\arctan\frac{1}{u}\left(-\frac{du}{u^2}\right)\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan\frac{1}{u}\,du\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan u\right)du \quad \text{car} \quad \arctan u + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan u\,du\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{2}}^{2} - I\\ &= \frac{3\pi}{2} - I\end{aligned}$$

Conclusion : $I = \frac{3\pi}{4}$.

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$. Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en $t$ (que l'on sait résoudre !).
En posant $t = \tan\frac{x}{2}$ on a $x = \arctan\frac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer $\sin x$. Comme $x$ varie de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ alors $t = \tan\frac{x}{2}$ varie de $t = 0$ à $t = 1$.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}\\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t}dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}dt\\ &= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^1 = 1\end{aligned}$$

2. Notons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$. Alors

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \big[x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

1. (a)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot \sin x\, dx.$$

En posant $u(x) = \sin^{n+1} x$ et $v'(x) = \sin x$ et en intégrant par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \Big[ -\cos x \sin^{n+1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \ + \ (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x\, dx \\ &= 0 \ + \ (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^n x\, dx \\ &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$. Conclusion

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(b) Nous avons donc une formule de récurrence pour $I_n$ qui s'exprime en fonction de $I_{n-2}$ qui a son tour s'exprime en fonction de $I_{n-4}$, etc. On se ramène ainsi à l'intégrale de $I_0$ (si $n$ est pair) ou bien de $I_1$ (si $n$ est impair). Un petit calcul donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Par récurrence nous avons donc pour $n$ pair :

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \frac{\pi}{2},$$

et pour $n$ impair :

$$I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdots n}.$$

(c) Pour calculer $\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx$ nous allons nous ramener à une intégrale de Wallis. Avec le changement de variable $x = \cos u$, on montre assez facilement que :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n dx &= 2 \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 - \cos^2 u\right)^n (-\sin u\, du) \qquad \text{avec } x = \cos u \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u\, du \\ &= 2 I_{2n+1} \end{aligned}$$

2. (a) Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est positive donc $I_n$ est positive. De plus, sur ce même intervalle $\sin x \leqslant 1$ donc $(\sin x)^{n+1} \leqslant (\sin x)^n$. Cela implique

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = I_n.$$

(b) Comme $(I_n)$ est décroissante alors $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, en divisant le tout par $I_n > 0$ nous obtenons $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Mais nous avons déjà calculé $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand $n$ tend vers l'infini. Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers $+1$ donc $I_n \sim I_{n+1}$.

3. (a) Nous allons calculer $I_n \cdot I_{n+1}$. Supposons par exemple que $n$ est pair, alors par les formules obtenues précédemment :

$$I_n \times I_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \frac{\pi}{2} \times \frac{2 \cdot 4 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (n+1)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n+1}.$$

Si $n$ est impair nous obtenons la même fraction. On en déduit que pour tout $n$ : $I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

(b) Maintenant

$$I_n^2 = I_n \cdot I_n \sim I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n},$$

donc

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(c)

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = I_{2n} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

1. Pour $x > 0$ on a $\frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, donc

$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

3. Soit $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Par la question précédente nous avons $S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n)$. Mais d'autre part cette somme étant télescopique cela conduit à $S_n = I_0 \pm I_n$. Alors la limite de $S_n$ et donc de $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (quand $n \to +\infty$) est $I_0$ car $I_n \to 0$. Un petit calcul montre que $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Donc la somme alternée des inverses des entiers converge vers $\ln 2$.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

La courbe d'équation $y = x^2/2$ est une parabole, la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$ est une courbe en cloche. Dessinez les deux graphes. Ces deux courbes délimitent une région dont nous allons calculer l'aire. Tout d'abord ces deux courbes s'intersectent aux points d'abscisses $x = +1$ et $x = -1$ : cela se devine sur le graphique puis se vérifie en résolvant l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Nous allons calculer deux aires :

— L'aire $\mathscr{A}_1$ de la région sous la parabole, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

— L'aire $\mathscr{A}_2$ de la région sous la cloche, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors

$$\mathscr{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

— L'aire $\mathscr{A}$ sous la cloche et au-dessus de la parabole vaut maintenant

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

Calculons seulement un quart de l'aire : la partie du quadrant $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Pour ce quadrant les points de l'ellipse ont une abscisse $x$ qui vérifie $0 \leqslant x \leqslant a$. Et la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donne $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Nous devons donc calculer l'aire sous la courbe d'équation $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $(x = 0)$ et $(x = a)$ (faites un dessin !).

Cette aire vaut donc : $\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$. Nous allons calculer cette intégrale à l'aide du changement de variable $x = a\cos u$ qui donne $dx = -a\sin u\,du$. La variable $x$ variant de $x = 0$ à $x = a$ alors la nouvelle variable $u$ varie du $u = \frac{\pi}{2}$ (pour lequel on a bien $a\cos\frac{\pi}{2} = 0$) à $u = \frac{\pi}{2}$ (pour lequel on a bien $a\cos 0 = a$). Autrement dit la fonction $u \mapsto a\cos u$ est une bijection de $[\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[0, a]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sqrt{1 - \cos^2 u}(-a\sin u\,du) \qquad \text{en posant } x = a\cos u \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin u(-a\sin u\,du) \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2u)}{2}du \\
&= ab\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi ab}{4}
\end{aligned}$$

L'aire d'un quart d'ellipse est donc $\frac{\pi ab}{4}$.
Conclusion : l'aire d'une ellipse est $\pi ab$, où $a$ et $b$ sont les longueurs des demi-axes. Si $a = b = r$ on retrouve que l'aire d'un disque de rayon $r$ est $\pi r^2$.

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

1. Soit
$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

   En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

   La somme de Riemann $u_n$ convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que $(u_n)$ converge vers $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I = \int_0^1 g(x)dx$. Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan $(v_n)$ a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

---