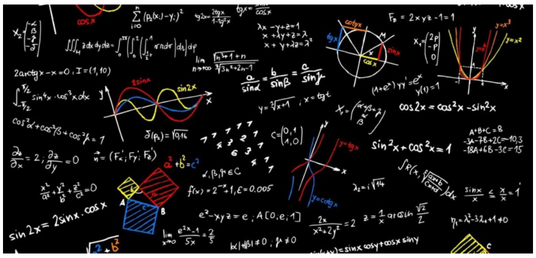
Mathématiques 2



Dr. Naima Mehenaoui

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté de Technologie

Département de Technologie

Émail : naima.mehenaoui@univ-bejaia.dz

Avril 2022

Table des matières

Objectifs

Le cours " Mathématique 2 " vise à

- Consolider des acquis du calcul différentiel et intégral vus au secondaire.
- Découvrir les bases fondamentales du calcul d'intégrales et des primitives
- Résoudre des équations différentielles.

I Équations différentielles

De nombreux problèmes d'origine physique, économique, biologique conduisent à chercher une fonction y dépendant d'une variable t sachant qu'il existe une relation entre y, t et éventuellement d'autres dérivées successives de$y(y'', ...)$. Une telle relation est appelée ***équation différentielle***.

1. Objectifs spécifiques

A l'issue de chapitre II l'apprenant sera capable de :

- Classifier une équation différentielle
- Déterminer à partir de sa "classification" la méthode de résolution de l'équation différentielle
- Résoudre une équation linéaire du premier ordre , en maîtrisant notamment la méthode de variation de la constante.
- Résoudre les équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

2. test prés requis

Exercice : test prés requis

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

3. généralités

Définition

Une équation différentielle$(ED)^*$ d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction inconnue d'une variable $y(x)$ ainsi que ses dérivées successives. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

où F est une relation liant la variable x à la fonction y et ses dérivées $y', ..., y^{(n)}$.

Toute fonction $y^{(n)}$ vérifiant $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ est appelée solution de l'équation différentielle.

L'ordre de l'équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée intervenant dans l'équation.

Exemple

1. $y'(x) = -3y(x) + 8$ est une équation différentielle d'ordre 1.

2. $y' + 2x(y'')^3 + 4x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.
3. $y + 4y^{(3)} + 8 = 0$ est une équation différentielle d'ordre 3.

Remarque

Dans l'exemple 2 et 3, il est sous-entendu que y est une fonction de x.

Définition

La forme générale d'une équations différentielles du premier ordre est:

$$F(x, y, y') = 0$$

où F est une relations liant x à la fonction y et sa dérivée y'.

Le plus souvent, les équations différentielles du premier ordre sont étudiées sous leurs formes résolues en $y' = f(x, y)$, où$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple

1. $y' + 3xy^2 + e^x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.
2. $x(y')^2 + 3y + 5x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

Définition : Problème de Cauchy

Soit$I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation $y' = f(x, y)$ et à la condition $y_0 = y(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y' = f(x, y)$ telle que $y_0 = y(x_0)$.

Définition : Solution

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle$I$ de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.

On notera en général cette solution (I, y).

Remarque

Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est trouver toutes les solutions quand elles existent.

4. Exercice

$y' + 3y + \ln x = 0$ est une équation différentielle

- [ ] d'ordre 1.
- [ ] d'ordre 2.

5. Équations différentielles du premier ordre

5.1. Équations différentielles à variables séparées

Définition

On appelle "***équation différentielle à variables séparées***" toute équation de la forme : $f(y)y' = g(x)$

où f et g sont deux fonctions réelles définies et continues respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

Méthode : Résolution d'une équations différentielles à variable séparées

Sachant que $y' = \dfrac{dy}{dx}$, alors

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) &\Longrightarrow f(y)dy = g(x)dx \\ &\Longrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx \\ &\Longrightarrow F(y) = G(x) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur J.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante

$y' = e^{-3y}$

On commence par séparer les variables. On a : $y' = e^{-3y}$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-3y}$$
$$\Longrightarrow e^{3y}dy = dx$$
$$\Longrightarrow \int e^{3y}dy = \int dx$$
$$\Longrightarrow e^{3y} = 3(x+c), c \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow 3y = \ln(|3(x+c)|), c \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow y(x) = \frac{1}{3}\ln(|3(x+c)|), c \in \mathbb{R}.$$

Alors la solution générale de l'équation différentielle est

$$y(x) = \frac{1}{3}\ln(|3(x+c)|), c \in \mathbb{R}.$$

5.2. Équations différentielles homogènes en x et y

Définition

On appelle ***"équations différentielles à variable homogènes en x et y "*** toute équation de la forme:

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Méthode : Méthode de résolution d'une Équations différentielles homogènes:

On pose: $t = \dfrac{y}{x}(y = xt)$. D'où $y' = t + xt'$.

Par suite, on a: $y' = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\Longrightarrow t + t'x = f(t)$

$\Longrightarrow x\dfrac{dt}{dx} = f(t) - t$

$\Longrightarrow \dfrac{dt}{f(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$

$\Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$

$\Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}.$

On détermine t puis on obtient la solution générale y grâce à la relation $y = xt$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}} \qquad (E)$$

On pose: $t = \dfrac{y}{x}$ $(y = tx)$. D'où $y' = t'x + t$.

En remplaçant dans l'équation (E), il en résulte $t'x + t = t + e^{-t}$

$\Longrightarrow t'x = e^{-t}$

$\Longrightarrow x\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}$

$\Longrightarrow e^{t} = \dfrac{dx}{x}$

$\Longrightarrow \int e^{t} = \int \dfrac{dx}{x}$

$\Longrightarrow e^{t} = ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow t = \ln|\ln|x| + c|, c \in \mathbb{R}.$

D'où

$$y(x) = x\ln|\ln|x| + c|, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation(E).

5.3. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition

On appelle***une équation différentielle linéaire du premier ordre***, une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I. Lorsque la fonction b est nulle, on dit que l'équation (E) est une équation homogène du premier ordre. Elle s'écrit

$$y' + a(x)y = 0 \qquad\qquad (Eh)$$

Méthode : Méthode de résolution d'une équations différentielles linéaire du premier ordre :

Pour résoudre l'équation (E) il est nécessaire de résoudre d'abord (Eh).

1. ***Résolution de l'équation homogène*** (Eh)
   L'équation (Eh) est une ***équation à variable séparables***. En effet, on a $y' = -a(x)y$
   $$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y,$$
   $$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$
   $$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx,$$
   $$\Longrightarrow ln|y| = -\int a(x)\,dx + c, c \in \mathbb{R}$$
   $$\Longrightarrow |y| = e^c e^{F(x)}, c \in \mathbb{R} \text{ et } F(x) = -\int a(x)\,dx.$$
   D'où
   $$y_h(x) = ke^{F(x)},\ \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}$$
   est la solution de l'équation (Eh).
2. ***Résolution de l'équation avec second membre***
   La solution générale de (E) est donnée par $y = y_h + y_p$ avecy_h est la solution de l'équation homogène (Eh) ety_p et la solutions particulière.
   Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante :
   On a: $y_h(x) = ke^{F(x)}$ est la solution de (Eh) avec k est une constante.
   La méthode de variation de constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{F(x)}$, où k est maintenant une fonction de la variable x à déterminer.
   On a: $y_p(x)$ vérifie (E). Donc
   $$y_p'(x) = k'(x)e^{F(x)} + k(x)F'(x)e^{F(x)},$$
   Or,$F'(x) = -a(x)$.
   En remplaçant dans (E) on trouve
   $$k'(x)e^{F(x)} - k(x)a(x)e^{F(x)} + a(x)k(x)e^{F(x)} = b(x)$$
   $$\Longrightarrow k'(x)e^{F(x)} = b(x)$$
   $$\Longrightarrow k'(x) = b(x)e^{-F(x)}$$
   $$\Longrightarrow k(x) = \int b(x)e^{-F(x)}dx.$$
   Donc, la solution particulière de (E) est
   $$y_p(x) = \left(\int b(x)e^{-F(x)}dx\right)e^{F(x)}$$
   et la solution générale de (E) est:
   $$\begin{aligned} y(x) &= ke^{F(x)}\left(\int b(x)e^{-F(x)}dx\right)e^{F(x)} \\ &= \left(\int b(x)e^{-F(x)}dx + k\right)e^{F(x)}, \end{aligned}$$

avec $F(x) = -\int a(x)dx$ et $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' + 3x^2y = x^2 \qquad (E)$$

puis résoudre le problème de Cauchy suivant;

$$\begin{cases} y' + 3x^2y = x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On commence d'abord par résoudre l'équation homogène:

$$y' + 3x^2y = 0 \qquad (Eh)$$

On a $y' + 3x^2y = 0$

$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -3x^2y$

$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = -3x^2$

$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2$

$\Longrightarrow \ln|y| = -x^3 + c, c \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow |y| = e^c e^{-x^3}, c \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow y = ke^{-x^3},\ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.$

Alors

$$y_h(x) = ke^{-x^3},\ k = \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (Eh).

Maintenant on cherche la solution particulière en utilisant la méthode de variation de constante.

On pose: $y(x) = k(x)e^{-x^3} \Longrightarrow y'(x) = K'(x)e^{-x^3} - 3x^2k(x)e^{-x^3}$.

En remplaçant y et y' dans (E) on obtient:

$$K'(x)e^{-x^3} - 3x^2k(x)e^{-x^3} + 3x^2k(x)e^{-x^3} = x^2$$

$\Longrightarrow K'(x)e^{-x^3} = x^2$

$\Longrightarrow K'(x) = x^2e^{x^3}$

$\Longrightarrow K(x) = \int x^2e^{x^3}dx$

$\Longrightarrow K(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Ainsi la solution particulière est:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}e^{x^3}e^{-x^3} = \frac{1}{3}.$$

Par suite, la solution générale de l'équation (E) est donnée par:

$y(x) = ke^{-x^3} + \frac{1}{3},\ k \in \mathbb{R}.$

Pour le problème de Cauchy, on a

$$y(0) = 1 \Longrightarrow k + \frac{1}{3} = 1$$
$$\Longrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Alors,

$$y(x) = \frac{2}{3}e^{-x^3} + \frac{1}{3},$$

est la solution du problème de Cauchy.

5.4. Exercice

$\boxed{y' + 4y = 4x}$ $\boxed{(x-2)^4 y' = 3(y^2+1)}$ $\boxed{y' + 4y = 0}$

équation différentielle à variable séparée	Équations différentielles linéaires du premier ordre	Équations différentielles linéaires homogène

6. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficient constants

On appelle ***équation différentielles linéaires du second ordre à coefficient constants*** toute équation de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On associe à (E) l'équation sans second membre: $y'' + ay' + by = 0. \qquad (Eh)$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. ***Le problème de Cauchy:***

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0,\ \text{où } x_0 \in I, \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

relatif à l'équation (E) et à la condition $y_0 = y(x_0)$ et $z_0 = y'(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation (E) telle que $y_0 = y(x_0)$ et $z_0 = y'(x_0)$.

6.1. Résolution de l'équation linéaire homogène associée

Méthode : Résolution de l'équation linéaire homogène associée

On cherche la solution de (Eh) sous la forme

$$y_h(x) = e^{rx} \quad \text{où } r \in \mathbb{R}.$$

On a alors:

$y_h'(x) = re^{rx}$ et $y_h''(x) = r^2e^{rx}$.

On remplace dans (Eh), on obtient

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rx} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad\qquad (Er)$$

(Er) est appelée ***"équation caractéristique"*** associée à (Eh) .

Soit $\triangle = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (Er). Il y a trois cas à envisager:

- ***Premier cas***: si $\triangle > 0$ alors (Er) admet deux racines réelles distincts r_1 et r_2.
  Dans ce cas, la solution générale de (Eh) est donnée par:
  $y_h(x) = A\, e^{r_1 x} + B\, e^{r_2 x}$,
  où $A, B \in \mathbb{R}$.
- ***Deuxième cas:*** si $\triangle = 0$ alors (Er) admet une racines réelles double r_0.
  Dans ce cas, la solution générale de (Eh) est donnée par:
  $y_h(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$,
  où $A, B \in \mathbb{R}$.
- ***Troisième cas :*** si $\triangle < 0$ alors (Er) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
  Dans ce cas, la solution générale de (Eh) est donnée par:
  $y_h(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$,
  où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

L'équation caractéristique est:

$$r^2 + 5r + 4 = 0,$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Ainsi, la solution générale de l'équation est

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-4x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$y'' + 5y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique est:

$r^2 + 5r + 4 = 0,$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Ainsi, la solution générale de l'équation est

$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-4x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$y'' + 4y' + 5y = 0$

L'équation caractéristique est:

$r^2 + 4r + 5 = 0,$

cette équation admet deux racines complexes conjuguées $-2 + i$ et $-2 - i$.

Ainsi, la solution générale de l'équation est

$y_h(x) = (A\cos x + B\sin x)\, e^{-2x},$

où$A, B \in \mathbb{R}.$

6.2. Résolution de l'équation linéaire non homogène

La solution générale de(E) est donnée par $y = y_h + y_p$ avec y_h est la solution de l'équation homogène (Eh) et y_p et la solutions particulière.

Méthode : Recherche de la solution particulière

On cherche la solution particulière de (E) soit par ***la méthode de la variation de la constante***, soit par la ***méthode des coefficients indéterminés*** lorsque le second membre a une forme spéciale.

1. ***Si le second membre est du type***$P(x)e^{\gamma x}$
   Si $f(x) = P(x)e^{\gamma x}$, avec P est un polynôme de degrén et $\gamma \in \mathbb{R}$, alors on cherche une solution particulière sous la forme
   $y_p = x^m Q(x)e^{\gamma x}$; où Q est un polynôme de même degré que P et m est donnée par:
   - si γ n'est pas racine de (Er) alors $m = 0$.
   - si γ est l'une des racines de (Er) alors $m = 1$.
   - si γ est une de racine double de (Er) alors $m = 2$.
2. ***Si le second membre est du type*** $(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$
   Si$f(x) = (P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, P_1 et P_2 sont des polynôme de degré n_1 et n_2 respectivement. Alors, une solution particulière de (E) sous la forme :
   $y_p(x) = x^m\,(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$
   avec Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré n et
   $n = \max\{degP_1, degP_2\}$

et m est donnée par:

- si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de (Er) alors $m = 0$.
- si $\alpha + i\beta$ est une racine de (Er) alors $m = 1$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y" - 4y' + 4y = 2x\,e^{3x} \qquad\qquad (E)$$

L'équation caractéristique est:

$$r^2 - 45r + 4 = 0, \qquad\qquad (E_r)$$

cette équation admet une racines réelles distinctes r_1. Ainsi, la

solution générale de (E) est

$$y_h(x) = (Ax + B)\,e^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (E).

On a: le second membre $2xe^{3x}$ est de la forme $P(x)e^{\gamma x}$ et 3 est n'est pas une racine de l'équation (E_r).\\

Donc, cherchons une solution particulière sous la forme.

$$y_p(x) = x^0(ax + b)e^{3x} = (ax + b)e^{3x}.$$

On a:

$$y_p'(x) = ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x}.$$

et

$$y_p''(x) = 6ae^{3x} + 9(ax + b)e^{3x}.$$

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans (E), on a:

$$6ae^{3x} + 9(ax + b)e^{3x} - 4ae^{3x} - 12(ax + b)e^{3x} + 4(ax + b)e^{3x} = 2xe^{3x}$$

Alors

$$(ax + +2a + b)e^{3x} = 2xe^{3x}$$

Par identification:

$$\begin{cases} a = 2, \\ 2a + b = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = -4. \end{cases}$$

Donc: la solution particulière de y_p de l'équation(E) est: $y_p(x) = (2x - 4)e^{3x}$.

Alors

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)\,e^{2x} + (2x - 4)e^{3x}, \quad A,\ B \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (E).

Complément : Principe de superposition

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière $y_p(x)$ est donnée par :

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

où $y_{p1}(x)$ est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

et $y_{p2}(x)$ est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x).$$

6.3. Exercice

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 6y = xe^x$$

- $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)e^x, A, B \in \mathbb{R}$
- $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A, B \in \mathbb{R}$
- $y(x) = (A + Bx)e^{2x} + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)e^x, A, B \in \mathbb{R}$

7. Test d'acquisition -chapitre 2

Objectifs

Ce test vous permettra de faire une synthèse sur chapitre 2 si les compétence visé ont été acquise

Exercice

$y' + 3y = 0$ est une équation différentielle

- linéaire non homogène du premier ordre
- linéaire homogène du premier ordre

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante: $y'' + 3y' = 0$

- $Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$
- $A + Be^{-3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$

II Test de sortie

Objectifs

Ce test vous permettra de faire une synthèse sur le cours et les savoirs si les compétence visé ont été acquise

Exercice

$$\int \frac{5x-12}{x(x-4)}dx$$

- ○ $3\ln|x| + 2\ln|x-4| + c$
- ○ $3\ln|x| + 4\ln|x-4| + c$

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (E)$$

- ○ $Ae^{x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$
- ○ $Ae^{3x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$

Exercice

$y'' - 2y = 0$ $\quad$ $y'' - 2y = \cos x$ $\quad$ $e^{x}y' + y = 0$

Équations différentielles linéaires du premier ordre	Équations différentielles linéaires du second ordre non homogène	Équations différentielles linéaires du second ordre homogène

Abréviations

ED : Équation différentielle