Équations différentielles

Fiche de Léa Blanc-Centi.

1 Ordre 1

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2\sin x$ (E_2)
3. $y' - y = (x+1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

Correction ▼ Vidéo ■ [006991]

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006992]

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006993]

Exercice 4 Variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006994]

Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$

2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006995]

Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006996]

2 Second ordre

Exercice 7

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Correction ▼ Vidéo ■ [006997]

Exercice 8

On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006998]

Exercice 9

Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} x$, où $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006999]

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0;+\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Correction ▼ Vidéo ■ [007000]

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccatti

1. **Équation de Bernoulli**
   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli
   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$
   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.
   (b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

2. **Équation de Riccati**

   (a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

   $$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

   alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

   (b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [007001]

Exercice 12

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (*Indication :* étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

Correction ▼ Vidéo ■ [007002]

Exercice 13

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction ▼ Vidéo ■ [007003]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Une telle fonction f est solution d'une équation différentielle $y' + y = c$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. x est solution particulière
2. cos est solution particulière

Indication pour l'exercice 4 ▲

Solution particulière :

1. $-\frac{1}{2x}$
2. $\frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$
3. $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. C'est une équation à variables séparées.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. une infinité de solutions
2. une solution

Indication pour l'exercice 8 ▲

Pour la fin : principe de superposition.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Utiliser la méthode de variation de la constante.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. (a) Se ramener à $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$.
   (b) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y = 0$.
2. (a) Remplacer y par $u + y_0$.
   (b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

   On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$: les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1). Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :
   $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de (E_1)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c = x^2$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.
   Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :
   $$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.
2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

   Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin :
   $y_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E_2)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = 2\sin x$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.
   Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :
   $$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.
3. Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d + 1 = 2$:
   $y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ est solution de (E_3)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) - y_0(x) = (x+1)e^x$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax + b)e^x = (x+1)e^x$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$ convient.
   Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :
   $$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.
4. Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :

$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha\cos x + \beta\sin x$ est solution de (E_4)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha+\beta)\cos x + (-\alpha+\beta)\sin x = x - e^x + \cos x$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.
Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Correction de l'exercice 2 ▲

Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ convient si et seulement si
— f est dérivable
— f est solution de $y' + y = c$
— f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)

Or les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$, donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.
Ainsi les solutions du problème sont exactement les

$$f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1})$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Comme le coefficient de y' ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

   (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 + 1$. Les solutions sont donc les $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{\lambda}{x^2+1}$.

   (b) Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : on remarque que $y_0(x) = x$ convient.

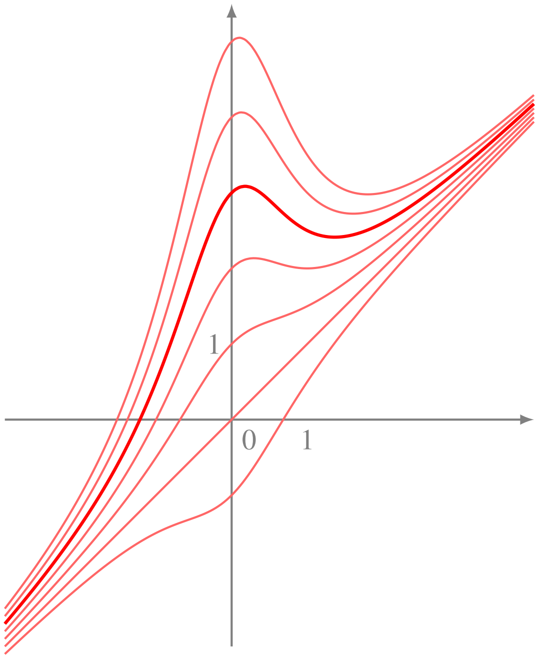
   (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

   où λ est un paramètre réel.

   (d) $y(0) = 3$ si et seulement si $\lambda = 3$. La solution cherchée est donc $y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$.

   Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -1, 0, \ldots, 5$.



2. On commence par remarquer que $y_0(x) = \cos x$ est une solution particulière. Pour l'équation homogène : sur l'intervalle considéré, le coefficient de y' ne s'annule pas, et l'équation se réécrit

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

Les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \sin x$. Les solutions de l'équation sont donc les $y(x) = \lambda e^{\ln(\sin x)} = \lambda \sin x$.

Finalement, les solutions de l'équation sont les

$$y(x) = \cos x + \lambda \sin x$$

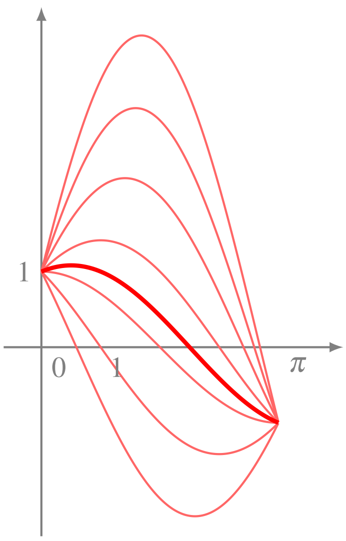
où λ est un paramètre réel.

3. On a

$$y(\frac{\pi}{4}) = 1 \iff \cos\frac{\pi}{4} + \lambda \sin\frac{\pi}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

La solution cherchée est $y(x) = \cos x + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) \sin x$

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -2, -1, 0, \ldots, 4$ et $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$ (en gras).



Correction de l'exercice 4 ▲

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$
   (a) **Résolution de l'équation homogène $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.**
   Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.
   (b) **Recherche d'une solution particulière.**
   Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
   On calcule d'abord
   $$y_0'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$
   Maintenant :
   $$\begin{aligned} & y_0 \quad \text{est solution de } y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1 \\ \iff & y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 = 1 \\ \iff & \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\ \iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \qquad \text{cela doit se simplifier !} \\ \iff & \lambda'(x) = x\exp(-x^2) \end{aligned}$$
   Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :
   $$y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$
   Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !
   (c) **Solution générale.**
   L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :
   $$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
   (a) **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$.**
   Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) **Recherche d'une solution particulière.**
   On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
   Comme $y_0'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors
   $$\begin{aligned} & y_0 \quad \text{est solution de } y' - y = x^k\exp(x) \\ \iff & \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\ \iff & \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\ \iff & \lambda'(x) = x^k \end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$$

(c) **Solution générale.**
L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$
Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Les solutions de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution} \\
\iff & y_0' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y_0 = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{=0} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque : le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

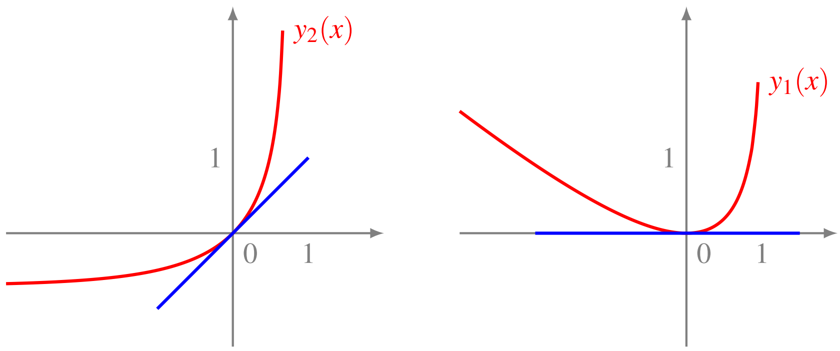
$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\lambda_0' = 1+\lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y'e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y} (y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:
$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$
Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$
où c est un paramètre réel strictement positif.
Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.



2. Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'est-à-dire $z'e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in J$, $e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :
$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$
où c est un paramètre réel.
Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $x^2 y' - y = 0$ (E_1)
Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
   (a) **Résolution sur** $]-\infty; 0[$ **ou** $]0; +\infty[$**.**
   Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit
   $$y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$
   qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en effet, sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $\frac{-1}{x}$).

(b) **Recollement en** 0.

Une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$: autrement dit, pour quels choix de $\lambda_+,\ \lambda_-$ la fonction y se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant (E_1) ?

— $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$ et $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_- = 0}$. On peut alors poser $\boxed{y(0) = 0}$, quel que soit le choix de λ_+.

— Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+ (\frac{-1}{x}) e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ \\ \text{pour } x < 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction y est dérivable en 0 et $\boxed{y'(0) = 0}$.

— Par construction, l'équation différentielle (E_1) est satisfaite sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions qu'elle est également satisfaite au point $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

(c) **Conclusion.**

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions suivantes :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;+\infty[$.

(a) **Résolution sur** I**.**

Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

— Pour l'équation homogène $y' + \frac{1}{x}y = 0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ sur I, est $-\ln|x|$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ si $I =]-\infty;0[$, on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$.

— Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant $y(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}$: en remplaçant, on voit que y est solution sur I si et seulement si $\lambda'(x) = 1$. En intégrant, on obtient $\lambda(x) = x$. Une solution particulière en donc $y_0(x) = 1$.

— Sur I les solutions de (E_2) sont les $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ où λ est un paramètre réel.

(b) **Recollement en** 0.

Une solution y de (E_2) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$. On voit tout de suite que y a une limite (finie) en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_+ = \lambda_- = 0}$. Dans ce cas, on peut alors poser $\boxed{y(0) = 1}$ et y est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, (E_2) est bien satisfaite au point $x = 0$.

(c) **Conclusion.**
Finalement, (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

Correction de **l'exercice 7 ▲**

1. Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2-3r+2=0$, qui admet deux solutions : $r=2$ et $r=1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=\lambda e^{2x}+\mu e^x$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
2. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$, qui admet deux solutions : $r=-1+i$ et $r=-1-i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ $(A,B\in\mathbb{R})$. Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x}+\mu e^{(-1-i)x}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
3. L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x+\mu)e^x$.
4. Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x=1+\cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a+b\cos(2x)+c\sin(2x)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=0$. Les solutions générales sont donc les $\lambda\cos x+\mu\sin x-\frac{1}{3}\cos(2x)+1$.

Correction de **l'exercice 8 ▲**

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2-4r+4=0$, pour laquelle $r=2$ est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x+\mu)e^{2x}$.
Lorsque $d(x)=e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x}, qui convient si $a=\frac{1}{16}$.
Lorsque $d(x)=e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2. Comme on sait déjà que $(\lambda x+\mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0 : on cherche donc une solution de la forme ax^2e^{2x}, qui convient si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.
Puisque $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})$, les solutions générales sont obtenues sous la forme $y(x)=\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{2x}$.

Correction de **l'exercice 9 ▲**

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. En posant $y_1(x)=\cos x$ et $y_2(x)=\sin x$, on va chercher les solutions sous la forme $\lambda y_1+\mu y_2$, vérifiant

$$\begin{cases}\lambda' y_1+\mu' y_2=0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2'=\operatorname{cotan} x\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda'\cos x+\mu'\sin x=0\\ \lambda'(-\sin x)+\mu'\cos x=\operatorname{cotan} x\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}0&\sin x\\ \operatorname{cotan} x&\cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x&\sin x\\ -\sin x&\cos x\end{vmatrix}}\\[2ex] \mu'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos x&0\\ -\sin x&\operatorname{cotan} x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x&\sin x\\ -\sin x&\cos x\end{vmatrix}}\end{cases}$$

d'après les formules de Cramer, où $\begin{vmatrix}\cos x&\sin x\\ -\sin x&\cos x\end{vmatrix}=1$. On obtient donc

$$\begin{cases}\lambda'(x)=-\cos x\\ \mu'(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}\end{cases}$$

ce qui donne une primitive $\lambda(x) = -\sin x$.
Pour μ, on cherche à primitiver $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos x$ (et donc $t = -\sin t\, x$), on calcule une primitive

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} x &= -\int \frac{t^2}{1-t^2} t = t - \int \frac{1}{1-t^2} t \\
&= t + \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1-t) = \cos x + \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)
\end{aligned}$$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (-\sin x)\cos x + \left(\cos x + \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\right)\sin x$$

qui se simplifie $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}\sin x \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0;+\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\
y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t) \\
y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t)
\end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2 y'' + xy' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\
y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\
y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2}\big(z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)\big)
\end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :
— $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m}\arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$

— $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,
— $m > 0$: alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m}\arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m}\arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. **Équation de Bernoulli**

(a) On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation $y'+a(x)y+b(x)y^n=0$ par y^n, ce qui donne
$$\frac{y'}{y^n}+a(x)\frac{1}{y^{n-1}}+b(x)=0.$$
On pose $z(x)=\frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x)=(1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :
$$\tfrac{1}{1-n}z'+a(x)z+b(x)=0$$

(b) Équation $xy'+y-xy^3=0$.
Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :
$$x\frac{y'}{y^3}+\frac{1}{y^2}-x=0$$
On pose $z(x)=\frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x)=-2\frac{y'(x)}{y(x)^3}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\frac{-1}{2}xz'+z-x=0$, c'est-à-dire :
$$xz'-2z=-2x.$$
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les
$$z(x)=\begin{cases}\lambda_+x^2+2x \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_-x^2+2x \text{ si } x<0\end{cases}\quad,\quad \lambda_+,\lambda_-\in\mathbb{R}$$
Comme on a posé $z(x)=\frac{1}{y^2(x)}$, on se retreint à un intervalle I sur lequel $z(x)>0$: nécessairement $0\notin I$, donc on considère $z(x)=\lambda x^2+2x$, qui est strictement positif sur I_λ où
$$I_\lambda=\begin{cases}]0;+\infty[& \text{si } \lambda=0\\ \left]0;-\frac{2}{\lambda}\right[& \text{si } \lambda<0\\ \left]-\infty;-\frac{2}{\lambda}\right[\text{ ou }]0;+\infty[& \text{si } \lambda>0\end{cases}$$
On a $(y(x))^2=\frac{1}{z(x)}$ pour tout $x\in I_\lambda$ et donc $y(x)=\varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\varepsilon(x)=\pm1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ, et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\varepsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1. Ainsi les solutions cherchées sont les :
$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}} \text{ ou } y(x)=\frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}\quad \text{sur } I_\lambda\qquad(\lambda\in\mathbb{R})$$
Noter que la solution nulle est aussi solution.

2. **Équation de Riccati**

(a) Soit y_0 une solution de $y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x)$. Posons $u(x)=y(x)-y_0(x)$, donc $y=u+y_0$. L'équation devient :
$$u'+y_0'+a(x)(u+y_0)+b(x)(u^2+2uy_0+y_0^2)=c(x)$$
Comme y_0 est une solution particulière alors
$$y_0'+a(x)y_0+b(x)y_0^2=c(x)$$
Et donc l'équation se simplifie en :
$$u'+\big(a(x)+2y_0(x)b(x)\big)u+b(x)u^2=0$$
qui est une équation du type Bernoulli.

(b) Équation $x^2(y'+y^2) = xy-1$.

— Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;+\infty[$.

— $y_0 = \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.

— On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y'+y^2) = xy-1$ devient

$$x^2\left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(u + \frac{1}{x}\right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2\left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x}\right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

— Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2, cette équation devient $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{u} + 1 = 0$. On pose $z(x) = \frac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$. Ses solutions sur I sont les $z(x) = \lambda x + x\ln|x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x\ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.

— Conclusion. Comme $y = u + \frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$:

$$y(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x\ln|x|} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons $A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,t$, une primitive de e^{x^2}. On ne sait pas expliciter cette primitive. Les solutions de $y' + e^{x^2}y = 0$ s'écrivent $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
   Si $x \geqslant 1$, on a par positivité de l'intégrale $A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,t \geqslant 0$ et comme $e^{t^2} \geqslant 1$ alors
   $$A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,t \geqslant \int_0^x 1\,t = x$$
   En conséquence :
   $$0 \leqslant e^{-A(x)} \leqslant e^{-x}$$
   Ainsi,
   $$0 \leqslant |f(x)| \leqslant |\lambda| e^{-x}$$
   et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2. Supposons que y vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation, et posons $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$. La fonction u est à valeurs positives, dérivable, et
   $$u'(x) = 2y'(x)y(x) + e^{-x^2}2y''(x)y'(x) - 2xe^{-x^2}y'(x)^2$$
   en utilisant que $e^{-x^2}y''(x) = -y(x)$ (car y est solution de l'équation différentielle) on obtient :
   $$u'(x) = -2xe^{-x^2}y'^2.$$
   Ainsi la fonction u est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant u(x) \leqslant u(0)$. Or $y^2(x) \leqslant u(x)$ par construction, donc
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |y(x)| \leqslant \sqrt{u(0)} = \sqrt{y(0)^2 + y'(0)^2}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. En faisant le changement de variable $x=e^t$ (donc $t=\ln x$) et en posant $z(t)=y(e^t)$ (donc $y(x)=z(\ln x)$, l'équation $x^2y''+y=0$ devient $z''-z'+z=0$, dont les solutions sont les $z(t)=e^{t/2}\cdot\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Autrement dit,
$$y(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

2. Supposons que f convienne : par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc $x\mapsto f(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$).
   En dérivant l'équation $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
   et en réutilisant l'équation :
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}f(x).$$
   Ainsi on obtient que f est solution de $x^2y''+y=0$ sur $\mathbb{R}^*$. Nécessairement, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que
$$\forall x>0,\ f(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$
   Par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathscr{C}^1$. Cherchons à quelle condition sur λ,μ cela est possible. Déjà, $f(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ pour tous λ,μ ; donc $f(0)=0$. Mais
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$
   n'a pas de limite en 0 si $\lambda\neq0$ ou $\mu\neq0$. En effet, pour $x_n=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n\to0$ mais $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=\frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda=0$. De même avec $x'_n=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi+\frac{\pi}{2})}$ qui donne $\frac{f(x'_n)-f(0)}{x'_n-0}=\frac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$ et implique donc $\mu=0$.
   Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda=\mu=0$. Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0,+\infty[$. Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty,0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.
