Résumé du Chapitre I :

1- Analyse dimensionnelle:

La dimension d'une grandeur renseigne sur sa nature physique. Par exemple une distance, une altitude, ont pour dimension une longueur. De manière générale, une grandeur physique G a une dimension si sa mesure dépend du choix de l'étalon de mesure. Sa dimension est notée [G].

Dans le système international est base sur 7 grandeurs fondamentales, auxquelles sont associées une dimension et une unité :

Grandeur physique	**Lettre utilisée**	**Unité de mesure S.I.**	**Symbole de l'unité**
Masse	M	kilogramme	kg
Longueur	L	mètre	m
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	Ampère	A
Température	Θ	Kelvin	K
Intensité lumineuse	J	candela	cd
Quantité de matière	N	mole	mol

Grandeurs dérivées:

Ce sont toutes grandeurs qui s'expriment comme une combinaison des grandeurs fondamentales (multiplication, division), par exemples:

- VITESSE: Distance parcourue par unité de temps, $v = \frac{dx}{dt}$ d'ou la dimension: **$[v] = L\ T^{-1}$**
- FORCE: Une force appliquée à une masse pour la faire accélérer. C'est le principe fondamental de la dynamique. donc F = m γ. grandeur : [F] = [m] [γ] = **$M\ LT^{-2}$**

De manière générale, dans le système S.I. l'équation aux dimensions d'une grandeur drivée G s'écrit en fonction des grandeurs fondamentales :$[G] = M^a.L^b.T^c I^d \theta^e J^x N^y$ où a,b,c,d,e,x et y sont des réels.
<u>En mécanique Newtonienne</u> on peut écrire:$[G] = M^a.L^b.T^c$ où a,b et c sont des réels.

Equations aux dimensions:

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées à partir des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T. Ainsi une vitesse qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par: $[v] = \frac{[l]}{[t]} = LT^{-1}$

Les règles de base sont assez simples et intuitives :

• si A et B sont deux grandeurs, on ne peut ´ecrire A + B, A − B ou A = B que si elles ont la même dimension c-à-dire [A] = [B]. En plus, Les membres des opérateurs >, < doivent être de même dimension.

• on a [AB] = [A][B] et [A/B] = [A]/[B],

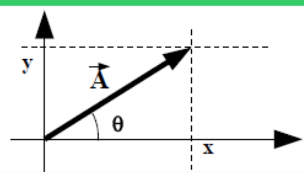
• on a $[A^q] = [A]^q$. Le nombre q devrait normalement être un rationnel,

• l'argument d'une fonction est toujours sans dimension.

2. Vecteurs

FORMULAIRE : CALCUL VECTORIEL DE BASE

Projection des vecteurs



$\vec{A}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$, $\|\vec{A}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\begin{cases} x=\|\vec{A}\|\cos\theta \\ y=\|\vec{A}\|\sin\theta \end{cases}$ et $\tan\theta=\frac{y}{x}$

Produit scalaire et produit vectoriel

	Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$	Produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
Définition	$\vec{A}.\vec{B}$ (est un nombre réel)	$\vec{A}\wedge\vec{B}$ (est un vecteur)
Expression en fonction de la norme	$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$	$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$
En fonction des coordonnées	$\vec{A}.\vec{B}=x_A x_B+y_A y_B+z_A z_B$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=(y_A z_B-z_A y_B, z_A x_B-x_A z_B, x_A y_B-y_A z_B)$
Commutation	$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$
Produit nul et conséquences	$\vec{A}.\vec{B}=0$ ssi : $\vec{A}$ ou $\vec{B}$ sont nuls ou bien $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont **orthogonaux**	$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$ ssi : $\vec{A}$ ou $\vec{B}$ sont nuls ou bien $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont **colinéaires**
Associativité	$(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}\neq\vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$	$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}\neq\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$
	$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}.\vec{B})\wedge\vec{C}$ appelé produit mixte des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$	

3. Opérateurs différentiels

a. <u>L'opérateur gradient</u>

Système de coordonnées	**f(M,t)**	**Expression de $\overrightarrow{grad}f$**
Cartésiennes	f(x,y,z,t)	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$
Cylindriques	f(ρ,φ,z,t)	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho}+\frac{\partial f}{\rho\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$
Sphériques	f(r,θ,φ,t)	$\frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r}+\frac{\partial f}{r\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{\partial f}{r sin\theta\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

b. <u>L'opérateur divergence</u>

Système de coordonnées	**Expression de $\overrightarrow{div}\vec{A}$**
Cartésiennes	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}$
Cylindriques	$\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\frac{\partial(r^2 A_r)}{r^2\partial r}+\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{r sin\theta\,\partial\theta}+\frac{\partial A_\varphi}{r sin\theta\partial\varphi}$

c. L'opérateur rotationnel

Système de coordonnées	Expression de $\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
Cartésiennes	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$
Cylindriques	$\left(\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \left(\frac{\partial (rA_\varphi)}{\rho\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\rho\partial\varphi}\right)\vec{k}$
Sphériques	$\left(\frac{\partial(sin\theta A_\varphi)}{rsin\theta\ \partial\theta} - \frac{\partial(A_\theta)}{rsin\theta\ \partial\varphi}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial(A_r)}{rsin\theta\ \partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{r\ \partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{r\ \partial r} - \frac{\partial A_r}{r\ \partial\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$

d. L'opérateur laplacien

Système de coordonnées	Expression de Δf
Cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Cylindriques	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial(\rho f)}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 f}{\rho^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Sphériques	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial(r^2 f)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$

Propriétés

$\vec{\nabla}.(\alpha f + \beta g) = \alpha\vec{\nabla}.f + \beta\vec{\nabla}.g\ \ avec\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{\nabla}.(f.g) = f.\vec{\nabla}.g + g.\vec{\nabla}.f$

$\vec{\nabla}.\left(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}\right) = \alpha\vec{\nabla}.\vec{A} + \beta\vec{\nabla}.\vec{B}\ avec\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$div\left(f.\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\left(f.\vec{A}\right) = f.\vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{A}.\vec{\nabla}.f = f.div\left(f.\vec{A}\right) + \vec{A}.\overrightarrow{grad}f$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}.\left(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}\right) = \alpha\overrightarrow{\mathrm{rot}}.\vec{A} + \beta\overrightarrow{\mathrm{rot}}.\vec{B}\ avec\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}.\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}.f\right) = 0$

$div\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(f\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(f.\vec{A}\right) = \vec{\nabla}f \wedge \vec{A} + f \wedge \vec{A} = \overrightarrow{grad}f \wedge \vec{A} + f.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$