# Chapitre 0

# Quelques résultats sur les E.D.O. linéaires du second ordre

## 0.1 Equations homogènes

Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0, \; x \in [a, b], \tag{1}$$

où $p$, $q$ et $r$ sont des fonctions continues sur $[a, b]$ avec $p(x) \neq 0, \forall\, x \in [a, b]$.

### 0.1.1 Rappel de quelques résultats sur les E.D.O. linéaires du second ordre :

1. Il existe exactement deux solutions $y_1$ et $y_2$ de l'équation (1) qui sont linéairement indépendantes sur $[a, b]$. C'est à dire il n'existe pas une constante $c$ tel que
$$y_1(x) = cy_2(x), \forall x \in [a, b].$$
2. Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions de l'équation (1), $c_1$ et $c_2$ sont deux constantes arbitraires alors $c_1y_1 + c_2y_2$ est aussi solution de l'équation (1).
De plus si $y_1$ et $y_2$ sont linéairement indépendantes alors toute solution $y$ de (1) peut s'écrire sous la forme
$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x), x \in [a, b] \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes.}$$
3. Si on connait une solution $y_1$ de l'équation (1) alors on peut déterminer l'autre solution en utilisant la méthode de variation de la constante. On aura une deuxième solution $y_2$ de la forme
$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{1}{{y_1}^2(t)} \exp\left(-\int^t \frac{q(s)}{p(s)} ds)\right) dt. \tag{2}$$
**Exemple :** Soit l'équation
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \; x \in \mathbb{R}^*.$$
Il est facile de vérifier que $y_1(x) = x^2$ est une solution de l'équation donnée et d'après la formule (2) sa deuxième solution est
$$y_2(x) = x^2 \int^x \frac{1}{t^4} \exp\left(-\int^t \frac{(-2s)}{s^2} ds)\right) dt = x^2 \int^x \frac{1}{t^4} t^2 dt = -x.$$

4. **Définition de Wronskien :** Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Le déterminant

$$W(x) = W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}, \; x \in I \tag{3}$$

   est appelé le Wronskien de $f$ et $g$.

5. **Propriétés de Wronskien :**

   **Proposition 0.1.** *Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions de l'équation (1).*

   (a) *$y_1$ et $y_2$ sont linéairement indépendantes sur $[a,b]$ si et seulement si leurs Wronskien défini par*

$$W(x) = W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

   *est différent de zéro pour tout $x \in [a,b]$.*

   (b) *Pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(x_0) \exp\left( -\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{p(t)} dt \right), \quad \text{où } x_0 \text{ est un point de l'ntervalle } [a,b].$$

   *Par conséquent, si le Wronskien de $y_1$ et $y_2$ est nul en un point $x_0$ de $[a,b]$, alors il est nul sur tout l'intervalle $[a,b]$.*

6. **Formule de dérivation d'une intégrale** :
   Soeint $u, v$ et $f$ des fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$.

$$\frac{d}{dt}\left( \int_{u(t)}^{v(t)} f(t,s)ds \right) = v'(t)f(t,v(t)) - u'(t)f(t,u(t)) + \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} ds, \; t \in [a,b]. \tag{4}$$

### 0.1.2 Résolution des E.D.O. linéaires homogènes à coefficients constants

Soient $a,\, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{5}$$

est dite équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre (non homogène). On lui associe l'équation sans second membre (homogène)

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{6}$$

**Résolution de l'équation homogène (6) :** L'équation

$$r^2 + ar + b = 0 \;\; ....... \;\; (C)$$

($r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite équation caractéristique de l'équation différentielle (6). Il y a trois cas à envisager

**Premier cas :** Si $(C)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, alors la solution générale de (6) est de la forme

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

où $C_1$, $C_2$ sont deux constantes réelles.

**Deuxième cas :** Si $(C)$ admet une racine réelle double $r$, alors la solution générale de (6) est de la forme

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx},$$

où $C_1$, $C_2$ sont deux constantes réelles.

**Troisième cas :** Si $(C)$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale de (6) est de la forme

$$y(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x},$$

où $C_1$, $C_2$ sont deux constantes réelles.

**Un exemple pour chaque cas**

**Exemple (1)**

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad ...... \ (1)$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemple (2)**

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad ...... \ (2)$$

L'équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

admet la racine réelle double $r = 2$. Ainsi, la solution générale de (2) est

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemple (3)**

$$y'' + 4y = 0 \quad ...... \ (3)$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 4 = 0$$

admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$. Ainsi, la solution générale de (3) est

$$\begin{aligned} y(x) &= (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{0x} \\ &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## 0.2 Equations non homogènes

Considérons l'équation différentielle du second ordre linéaire

$$(E) \qquad p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

où $p$, $q$, $r$ et $f$ sont des fonctions continues sur $[a, b]$, associée à des conditions aux bords linéaires non séparées :

$$(F) \quad \begin{cases} U_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \gamma, \\ U_2(y) = \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

les $\alpha_i$, $\beta_i$, $i = 1, 4$ et $\gamma$, $\delta$ sont des constantes réelles données.

**Définition 0.1.** *On appelle problème aux limites homogène associé au problème* $(E)+(F)$ *le problème* $(E_H)+(F_H)$ *tel que :*

$$(E_H) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad a < x < b$$

*et*

$$(F_H) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0. \end{cases}$$

*Si* ($f = 0$ *et* ($\gamma \neq 0$ *ou* $\delta \neq 0$)) *ou* ($f \neq 0$ *et* $\gamma = \delta = 0$), *on dit que le problème* $(E)+(F)$ *est semi homogène.*

**Remarque 0.1.** 
1. *Le problème aux limites* $(E)+(F)$ *est dit régulier si* $a$ *et* $b$ *sont des nombres finis et* $p$, $q$, $r$ *sont des fonctions bornées sur* $[a,b]$ *et* $p(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, *sinon on dit qu'il est singulier.*
2. *Une solution d'un problème aux limites est une fonction qui satisfait l'équation différentielle et les conditions aux limites associées*
3. *Les conditions aux bords linéaires* $(F)$ *sont générales, en particulier elles comprennent :*

a) *les conditions de Dirichlet :* $y(a) = \gamma$, $y(b) = \delta$ *;*

b) *les conditions de Neumann :* $y'(a) = \gamma$, $y'(b) = \delta$ *;*

c) *les conditions mixte :* $y(a) = \gamma$, $y'(b) = \delta$ *ou* $y'(a) = \gamma$, $y(b) = \delta$ *;*

d) *les conditions aux limites linéaires séparées*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

*où* ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 \neq 0$ *et* ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0$.

e) *Les conditions aux limites linéaires périodiques*

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b). \end{cases}$$

**Remarque 0.2.** *L'étude de l'existence et de l'unicité de solutions des problèmes aux limites est plus difficile que celle des problèmes à valeurs initiales (problèmes de Cauchy). En fait, dans le cas des problèmes aux limites, une légère modification des conditions aux limites peut conduire à des changements significatifs dans le comportement des solutions. Par exemple, le problème à valeurs initiales*

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = \gamma, \quad y'(0) = \delta, \end{cases}$$

*a pour tout* $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *une unique solution définie par :* $y(x) = \gamma \cos x + \delta \sin x$.
*Cependant, le problème aux limites*

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \; 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = \gamma \; (\gamma \neq 0), \end{cases}$$

*n'admet pas de solutions et le problème*

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < b \; (0 < b < \pi), \\ y(0) = 0, \; y(b) = \gamma, \end{cases}$$

*a pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$, *une unique solution définie par :* $y(x) = \gamma \frac{\sin x}{\sin b}$.
*Alors que le problème*

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \end{cases}$$

*admet une infinité de solutions définies par :* $y(x) = c \sin x,\ c \in \mathbb{R}$.

Le problème homogène $(E_H) + (F_H)$ admet toujours la solution triviale (nulle) $y \equiv 0$. D'après l'exemple précédent il peut avoir des solutions non nulles. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème $(E_H) + (F_H)$ n' admet pas des solutions non triviales.

**Théorème 0.1.** *Soient* $\varphi_1$ *et* $\varphi_2$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* $(E_H)$. *Alors le problème homogène* $(E_H) + (F_H)$ *a uniquement la solution triviale* $y \equiv 0$ *si et seulement si*

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Démonstration.** Toute solution de l'équation $(E_H)$ peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$y$ est solution du problème $(E_H) + (F_H)$ si et seulement si

$$\begin{cases} U_1(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = 0 \\ U_2(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne le système linéaire

$$(S) \begin{cases} c_1U_1(\varphi_1) + c_2U_1(\varphi_2) = 0 \\ c_1U_2(\varphi_1) + c_2U_2(\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Par suite, le système $(S)$ admet uniquement la solution triviale si et seulement si son déterminant $\Delta$ est non nul.

**Exemple 0.1.** *Considérons le problème de Dirichlet*

$$(Q) \begin{cases} xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0, \quad 1 < x < 2 \\ U_1(y) = y(1) = 0, \\ U_2(y) = y(2) = 0, \end{cases}$$

*on a* $\varphi_1(x) = \cosh(x^2 - 1)$ *et* $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\sinh(x^2 - 1)$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* $xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0$ *avec*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh 3 & \frac{1}{2}\sinh 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sinh 3 \neq 0.$$

*D'où le problème* $(Q)$ *admet que la solution triviale* $y \equiv 0$.

Dans ce qui suit, nous présentons un résultat, appelé Alternative de Fredholm, qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème non homogène $(E) + (F)$ dans le cas où le problème homogène admet uniquement la solution triviale.

**Théorème 0.2.** ***(Alternative de Fredholm)***
*Le problème non homogène* $(E) + (F)$ *admet une solution unique si et seulement si le problème homogène* $(E_H) + (F_H)$ *admet uniquement la solution triviale* $y \equiv 0$.

**Démonstration.** Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $(E_H)$ et $\psi$ une solution particulière de l'équation non homogène $(E)$. Alors la solution générale de l'équation $(E)$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \psi(x),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

$y$ est solution du problème non homogène $(E) + (F)$ si et seulement si

$$\begin{cases} U_1(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi) = \gamma \\ U_2(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi) = \delta, \end{cases}$$

ce qui donne le système linéaire

$$(S') \quad \begin{cases} c_1U_1(\varphi_1) + c_2U_1(\varphi_2) = \gamma - U_1(\psi) \\ c_1U_2(\varphi_1) + c_2U_2(\varphi_2) = \delta - U_2(\psi). \end{cases}$$

Le système $(S')$ admet une unique solution si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Par conséquent, le théorème 0.1 assure que le problème homogène ayant que la solution triviale $y \equiv 0$.

## 0.3 Exercices Corrigés

**Exercice 0.1.** *Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :*

1. $y'' - 3y' + 2y = 0;$
2. $y'' + 2y' + y = 0;$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0;$
4. $y'' - 2\alpha y' + y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

**Solution 0.1.** *Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :*

1. $$y'' - 3y' + 2y = 0 ...... (E_1)$$

   *L'équation caractéristique de $(E_1)$ est*

   $$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

   *Cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $(E)$ est*

   $$y(x) = Ae^x + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

2. $$y'' + 2y' + y = 0 ...... (E_2)$$

   *L'équation caractéristique de $(E_2)$ est*

   $$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

   *Cette équation admet la racine réelle double $r = -1$. Ainsi, la solution générale de $(E_2)$ est*

   $$y(x) = (A + Bx)e^{-x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

3.
$$y'' - 2y' + 2y = 0........ (E_3)$$

*L'équation caractéristique de* $(E_3)$ *est*

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

*Cette équation admet deux racines complexes conjuguées* $r_1 = 1 + i$ *et* $r_2 = 1 - i$. *Ainsi, la solution générale de* $(E_3)$ *est*

$$y(x) = (A \sin x + B \cos x) e^x, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

4.
$$y'' - 2\alpha y' + y = 0...... (E_4)$$

*où* $\alpha \in \mathbb{R}$. *L'équation caractéristique de* $(E_4)$ *est*

$$r^2 - 2\alpha r + 1 = 0.$$

*On a* $\Delta = 4\alpha^2 - 4$.
*Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique trois cas peuvent se présenter selon le signe du discriminant* $\Delta$.

$$\begin{array}{lll} \Delta > 0 & si & \alpha \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[\,; \\ \Delta = 0 & si & \alpha \in \{-1, 1\}\,; \\ \Delta < 0 & si & \alpha \in ]-1, 1[\,. \end{array}$$

***Premier cas :*** *Si* $\alpha \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$, *on a :* $\Delta > 0$ *et l'équation* $(E_4.C)$ *admet deux racines réelles distinctes*

$$r_1 = \frac{2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1},$$
$$r_2 = \frac{2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

*Donc, la solution générale de* $(E_4)$ *est*

$$y(x) = Ae^{\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)x} + Be^{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)x}, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

***Deuxième cas :*** *Si* $\alpha \in \{-1, 1\}$, *on a* $\Delta = 0$ *et l'équation* $(E_4.C)$ *admet une racine réelle double* $r = \alpha$. *Donc, la solution générale de* $(E_4)$ *est*

$$y(x) = (A + Bx) e^{\alpha x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

***Troisième cas :*** *Si* $\alpha \in ]-1, 1[$ *on a* $\Delta < 0$ *et l'équation* $(E_4.C)$ *admet deux racines complexes conjuguées*

$$r_1 = \frac{2\alpha + i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2}$$
$$r_2 = \frac{2\alpha - i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

*Donc, la solution générale de* $(E_4)$ *est*

$$y(x) = \left(A \sin\left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right) x + B \cos\left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right) x\right) e^{\alpha x}, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 0.2.** *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :*

1. $y'' - y = x^2 + x + 1$;
2. $y'' - 2y' - 8y = e^x$;
3. $y'' - 2y' = sin\, x$; ;
4. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

**Solution 0.2.** *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :*

1.
$$y'' - y = x^2 + x + 1 ...... (E_1)$$

*L'équation homogène associée à* $(E_1)$ *est*

$$y'' - y = 0 ..... (E_1.H)$$

*L'équation caractéristique de* $(E_1.H)$ *est*

$$r^2 - 1 = 0.$$

*Les racines de l'équation sont :* $r_1 = -1, r_2 = 1$. *Ainsi, la solution générale de* $(E_1.H)$ *est*

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^x, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

***Recherche d'une solution particulière*** $y_p$ ***de*** $(E_1)$ ***:***
*On a le second membre de l'équation* $(E_1)$ *est*

$$f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right) e^{0x}.$$

*Comme* $0$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* $(E_1.C)$, *donc on cherche une solution particulière de* $(E_1)$ *sous la forme :*

$$y_p(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

*où* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *On a*

$$y_p^{'}(x) = 2ax + b \quad et \quad y_p^{''}(x) = 2a.$$

*En substituant dans l'équation* $(E_1)$ *les expressions de* $y_p$ *et de* $y_p''$, *on obtient*

$$(E_1) \Rightarrow 2a - \left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1.$$

*Par identification, on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3. \end{cases}$$

*D'où, une solution particulière* $y_p$ *de* $(E_1)$ *est*

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

*Finalement,*

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, \ A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*est la solution générale de l'équation* $(E_1)$.

2.
$$y'' - 2y' - 8y = e^x ...... (E_2)$$

*L'équation homogène associée à $(E_2)$ est*

$$y'' - 2y' - 8y = 0..... (E_2.H)$$

*L'équation caractéristique de $(E_2.H)$ est*

$$r^2 - 2r - 8 = 0.$$

*Les racines de l'équation sont : $r_1 = -2, r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de $(E_2.H)$ est*

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

***Recherche d'une solution particulière $y_p$ de $(E_2)$ :***
*On a le second membre de l'équation $(E_2)$ est*

$$f(x) = e^x = e^{1x}.$$

*Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_2.C)$, donc on cherche une solution particulière de $(E_2)$ sous la forme : $y_p(x) = ae^x$ où $a \in \mathbb{R}$. On a*

$$y_p^{'}(x) = ae^x \quad \text{et} \quad y_p^{''}(x) = ae^x.$$

*En substituant dans l'équation $(E_2)$ les expressions de $y_p, y_p'$ et de $y_p''$, on obtient*

$$(E_2) \Rightarrow ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x,$$

*Par identification, on obtient*

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -9a = 1 \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{-1}{9}. \end{aligned}$$

*Donc, une solution particulière $y_p$ de $(E_2)$ est*

$$y_p(x) = \frac{-1}{9}e^x.$$

*Finalement,*

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \frac{-1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \ A \text{ et } B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*est la solution générale de l'équation $(E_2)$.*

3.
$$y'' - 2y' = \sin x ...... (E_3)$$

*L'équation homogène associée à $(E_3)$ est*

$$y'' - 2y' = 0..... (E_3.H)$$

*L'équation caractéristique de* $(E_3.H)$ *est*

$$r^2 - 2r = 0.$$

*Les racines de l'équation sont :* $r_1 = 0$ *et* $r_2 = 2$. *Ainsi, la solution générale de* $(E_3.H)$ *est*

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + Be^{2x}, \\ &= A + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

***Recherche d'une solution particulière*** $y_p$ ***de*** $(E_3)$ ***:***
*On a le second membre de l'équation* $(E_3)$ *est*

$$f(x) = \sin x = \sin(1x)\, e^{0x}.$$

*Comme* $0 + 1i$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* $(E_3.C)$ , *donc on cherche une solution particulière* $y_p$ *de l'équation* $(E_3)$ *sous la forme*

$$y_p(x) = a\sin x + b\cos x,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

*On a*

$$y_p^{'}(x) = a\cos x - b\sin x \quad et \quad y_p^{''}(x) = -a\sin x - b\cos x.$$

*En substituant dans l'équation* $(E_3)$ *les expressions de* $y_p, y_p'$ *et de* $y_p''$, *on obtient*

$$\begin{aligned} (E_3) &\Rightarrow -a\sin x - b\cos x - 2(a\cos x - b\sin x) = \sin x, \\ &\Rightarrow (-a + 2b)\sin x + (-b - 2a)\cos x = \sin x. \end{aligned}$$

*Par identification, on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} -a + 2b = 1, \\ -b - 2a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

*Donc une solution particulière* $y_p$ *de l'équation* $(E_3)$ *est*

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x.$$

*Finalement,*

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x,\ A, B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*est la solution générale de* $(E_3)$ .

*4.*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\, e^{-x} \ldots\ldots (E_4) \\ y(0) = 0 \quad et \quad y'(0) = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (I)$$

*- On va résoudre d'abord l'équation* $(E_4)$ *:*
*L'équation homogène associée à* $(E_4)$ *est*

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \ldots\ldots (E_4.H)$$

*L'équation caractéristique de* $(E_4.H)$ *est*

$$r^2 - 4r + 3 = 0.$$

*Les racines de l'équation sont :* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 3$*. Ainsi, la solution générale de* $(E_4.H)$ *est*

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

***Recherche d'une solution particulière*** $y_p$ ***de*** $(E_4)$ ***:***
*On a le second membre de l'équation* $(E_4)$ *est*

$$f(x) = (2x+1)\,e^{-x}.$$

*Comme* $-1$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* $(E_4.C)$*, donc on cherche une solution particulière de* $(E_4)$ *sous la forme :*

$$y_p(x) = (ax+b)\,e^{-x},\ \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

*On a*

$$y_p^{'}(x) = (-ax+a-b)\,e^{-x} \text{ et } y_p^{''}(x) = (ax-2a+b)\,e^{-x}.$$

*En substituant dans l'équation* $(E_4)$ *les expressions de* $y_p, y_p'$ *et de* $y_p''$*, on obtient*

$$(E_4) \Rightarrow (ax-2a+b)\,e^{-x} - 4(-ax+a-b)\,e^{-x} + 3(ax+b)\,e^{-x} = (2x+1)\,e^{-x},$$

$$\Rightarrow 8ax - 6a + 8b = 2x + 1.$$

*Par identification, on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}. \end{cases}$$

*Donc, une solution particulière* $y_p$ *de* $(E_4)$ *est*

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

*Par suite,*

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + Be^{3x},\ A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*est la solution générale de l'équation* $(E_4)$.
*Pour le problème de Cauchy* $(I)$, *on a*

$$Y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0.....(1)$$

*On a aussi*

$$Y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}.$$

*D'où*

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0.....(2)$$

*De* (1) *et* (2) , *on a*

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0, \end{cases} \quad d'où : \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

*Finalement,*

$$Y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{16}e^{3x},$$

*est la solution de problème du Cauchy* $(I)$ .

**Exercice 0.3.** *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :*

1. $y'' - 4y' + 7y = e^x$.
2. $xy'' - y' = 3x^2$.
3. $x^2y'' + 3xy' + y = x - 1$.

**Solution 0.3.** *Les solutions sont données par :*

1. $y(x) = (c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x)e^{2x} + (1/4)e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $y(x) = c_1x^2 + c_2 + x^3,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y(x) = c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{4}(x - 4),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**Exercice 0.4.** *On considère l'équation différentielle homogène du second ordre suivante :*

$$y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0,\ x \in [a, b], \tag{7}$$

*où* $q \in \mathcal{C}([a, b])$. *Montrer que :*

1. *Si* $y_1$ *et* $y_2$ *sont* <u>*deux solutions*</u> *de l'équation (7), alors soit* $W(y_1, y_2) = 0$ *pour tout* $x \in [a, b]$, *soit* $W(y_1, y_2) \neq 0$ *pour tout* $x \in [a, b]$.
2. *Deux solutions* $y_1$ *et* $y_2$ *de l'équation (7) sont linéairement indépendantes si et seulement si* $W(y_1, y_2) \neq 0$ *sur* $[a, b]$.

**Solution 0.4.** 1. *Soient* $y_1$ *et* $y_2$ *deux solutions de l'équation (7).*
*De la définition (3) de Wronskien, obtient*

$$W'' = y_1y_2'' - y_2y_1''.$$

*Comme* $y_1$ *et* $y_2$ *sont deux solutions de l'équation (7), on aura*

$$y_1'' + qy_1'(x) + ry_1 = 0,$$

$$y_2'' + qy_2'(x) + ry_2 = 0.$$

*En multipliant la première équation par* $y_2$, *la seconde par* $y_1$ *et en soustrayant, on obtient*

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + q(y_1y_2' - y_2y_1') = 0$$

$$\Rightarrow W' + qW = 0.$$

*En intégrant cette dernière équation, on aura*

$$W(x) = c\exp\left(-\int^x q(t)\,dt\right),\ x \in [a, b], \qquad (\text{ c'est l'idetité d'Abel }) \tag{8}$$

*où $c$ est une constante arbitraire.*
*Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur tout $\mathbb{R}$, donc*

$$W(x) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

*De plus, pour $x_0 \in [a, b]$, on peut montrer que*

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} q(t)\,dt\right),\ x \in [a, b].$$

*Par conséquent, si le Wronskien est nul en un point $x_0$ de $[a, b]$ alors il est nul sur tout l'intervalle $[a, b]$.*

2. *Si $y_1$ et $y_2$ sont linéairement dépendants, alors $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tel que $y_1 = ky_2$, et donc*

$$W(y_1, y_2)(x) = 0 \quad sur \quad [a, b].$$

*Inversement, si $W(y_1, y_2)(x) = 0$ en un point de $[a, b]$, alors de la question (1), on obetient*

$$W(y_1, y_2)(x) = 0,\ \forall\, x \in [a, b].$$

*D'après les propriétés des déterminants, on obtient que les fonctions vectorielles $(y_1, y_1')$ et $(y_2, y_2')$ sont linéairement dépendants, et donc $y_1$ et $y_2$ sont linéairement dépendants.*

**Exercice 0.5.** *Soit le problème de Cauchy (problème à conditions initiales) :*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0,\ x \in [a, b] \\ y(a) = \gamma \\ y'(a) = \delta, \end{cases} \qquad \text{où } \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ et } q, r \in \mathcal{C}([a, b]).$$

*Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (7).*
*Montrer, à l'aide du Wronskien de $y_1$ et $y_2$, que le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution pour tout $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

**Solution 0.5.** *Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (7).*
*Toute solution de l'équation (7) peut s'écrire sous la forme*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*$y$ est solution du problème $(\mathcal{P})$ si et seulement si*

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = \gamma \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = \delta. \end{cases} \tag{9}$$

*(9) est un système linéaire de déterminant*

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(a),$$

*ce qui ne peut pas être nul d'après l'exercice précédent.*
*D'où, le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution pour tout $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

**Exercice 0.6.** *Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :*

$$p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0, \ \ x \in [a, b] \tag{10}$$

*où* $p$, $q$ *et* $r$ *sont des fonctions continues sur* $[a, b]$ *avec* $p(x) \neq 0, \forall\, x \in [a, b]$.

*Montrer que si* $y_1$ *est une solution de l'équation (10) alors*

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{1}{{y_1}^2(t)} \exp\left( - \int^t \frac{q(s)}{p(s)} ds \right) dt. \tag{11}$$

*est aussi une solution de cette équation.*

**Solution 0.6.** *Utiliser formule de dérivation d'une intégrale (4).*

*Chargée de cours : Mme K. KHELOUFI-MEBARKI*