Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ère}}$ année

Année universitaire : 2022/2023
MATHS1 Octobre 2022

Corrigé de la séris de TD N°01 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n°1 .

1) Comme la proposition $(\sqrt{25}=5)$ est vraie, donc la proposition

$$[(1=-1)\vee(\sqrt{25}=5)]$$

est aussi vraie.
La négation :

$$\overline{[(1=-1)\vee(\sqrt{25}=5)]}\Longleftrightarrow[(1\neq-1)\wedge(\sqrt{25}\neq5)]$$

2) $\exists x\in\mathbb{N},x^2>24$ est une proposition vraie. En effet, pour $x=5$ par exemple,on a $5^2=25>24$.
La négation :

$$\left[\overline{\exists x\in\mathbb{R},\ x^2>24}\right]\Longleftrightarrow\left[\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2\leq24\right]$$

3)$\forall x\in\mathbb{R}^*,\forall y\in\mathbb{R}^*;xy\neq0$ est une proposition vraie puisque $x\neq0$ et $y\neq0.(xy=0\Leftrightarrow x=0$ ou $y=0)$
La négation :

$$\left(\overline{\forall x\in\mathbb{R}^*,\forall y\in\mathbb{R}^*;xy\neq0}\right)\Leftrightarrow(\exists x\in\mathbb{R}^*,\exists y\in\mathbb{R}^*;xy=0)$$

4) $\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R};xy=1$ est une proposition fausse car si un tel x existe pour $y=0,xy=0\neq1$
La négation :

$$(\overline{\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R};xy=1})\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R};xy\neq1)$$

5) La négation :

$$(\overline{\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R};x+y\leq9})\Leftrightarrow(\exists x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R};x+y>9)$$

.
La proposition $(\exists x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R};x+y>9)$ est vraie,il suffit de prendre par exemple $x=7,y=3$, on a

$$7+3=10>9$$

.
Par la suite, la proposition $[\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R};x+y\leq9]$ est fausse.

Exercice n°2 . Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que

$$(P\Longrightarrow Q)\Longleftrightarrow(\overline{Q}\Longrightarrow\overline{P})$$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\Longrightarrow Q$	$\overline{Q}\Longrightarrow\overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On remarque de cette table de vérité que les propositions ($P \Longrightarrow Q$) et ($\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$) ont la même valeur de vérité (elles sont vraies en même temps et elles sont fausses en même temps), donc elles sont équivalentes.

2. Donnnons la négation des propositions suivantes
(a)$P \Rightarrow Q$,

$$\begin{aligned}\overline{P \Rightarrow Q} &\Longleftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \\ &\Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}.\end{aligned}$$

(b) $P \vee (Q \wedge R)$.

$$\begin{aligned}\overline{P \vee (Q \wedge R)} &\Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}).\end{aligned}$$

3. Considérons la proposition

$$S : \text{"}\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)\text{"}$$

(a) Donnons la négation de la proposition S.

$$\overline{S} : \text{"}\exists n \in \mathbb{N}, [(n^2 \neq n) \wedge (n \geq 2)]\text{"}.$$

(b) Montrons que la proposition S est vraie. Il suffit de montrer que la proposition $\overline{S}$ est fausse. En effet la proposition ($n < 2$) est vrai si $n = 0$ ou $n = 1$. Mais dans ces deux cas, on a bien $n^2 = n$. Cest à dire que la proposition

$$\overline{S} : \text{"}\exists n \in \mathbb{N}, [(n^2 \neq n) \wedge (n \geq 2)]\text{"}$$

est fausse. Par suite, la proposition S est vraie.

Exercice n°3 .

1. Soients $x, y \in \mathbb{R}^*$.
L'assertion :$y \neq -\frac{3}{4}x \Longrightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$, est équivalente à :

$$\frac{x-y}{x+y} = 7 \Longrightarrow y = \frac{-3}{4}x$$

On a

$$\begin{aligned}&\frac{x-y}{x+y} = 7 \\ &\Longrightarrow x - y = 7(x+y) \\ &\Longrightarrow -y - 7y = -x + 7x \\ &\Longrightarrow -8y = 6x \\ &\Longrightarrow y = \frac{-6x}{8} \\ &\Longrightarrow y = \frac{-3}{4}x\end{aligned}$$

Par contraposition ceci est équivalent à :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7.$$

2. On raisonne par l'absurde. On suppose que
$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}.$$
Donc
$$\begin{aligned}
&\exists k \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+1} = k \\
\Longrightarrow &\exists k \in \mathbb{N}^* : 1 = k^2 - n^2 \\
\Longrightarrow &\exists k \in \mathbb{N}^* : 1 = (k-n)(k+n) \\
\Longrightarrow &\exists k \in \mathbb{N}^* : k - n = \frac{1}{k+n}.
\end{aligned}$$
Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}
0 < \frac{1}{k+n} < 1 &\Longrightarrow 0 < k - n < 1 \\
&\Longrightarrow n < k < n+1,
\end{aligned}$$
Ce qui est une contradiction (car il n'existe pas un entier entre deux entiers consécutifs).
D'où,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}.$$

3. En utilisant le raisonnement direct, montrons que
$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$
. On suppose que "$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$" est vraie. est ce que c'est vraie pour "$x = 0$" ?
On a $(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) = 1 \Longrightarrow 1 - x = 1$ donc $x = 0$ est vraie.

Exercice n°4. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrons que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n
$$P(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$
Nous allons démontrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.
Etape 1 (Initialisation) : pour $n = 1$ on a $2(1) - 1 = 1 = 1^2$. Donc $P(1)$ est vraie
Etape 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $P(n)$ est vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= 2(1) - 1 + 2(2) - 1 + ... + 2(n) - 1 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

Etape 3 (Conclusion) On a donc démontrer par récurrence que P(n)est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   Etape 1 (Initialisation) : Si $n = 1$ alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1$ et$\dfrac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = 1$

   La propriété est vraie au rang 1

   Etape 2 On suppose que la propriété est vraie au rang n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= S_n + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

   Etape 3 (Conclusion) : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire.

   Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, on a alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, 5 divise $6^n - 1$.
   Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : 6^n - 1 = 5k$$

   Etape 1 (Initialisation) : Pour $n = 0$, on a : $6^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 5 \times 0$. $P(0)$ est donc vraie, avec $P(n)$: 5 divise $6^n - 1$

   Etape 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire
   $\exists k \in \mathbb{N} : \quad 6^n - 1 = 5k$
   Et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire
   $\exists k' \in \mathbb{N} : \quad 6^{n+1} - 1 = 5k'$
   On a

$$\begin{aligned}
6^{n+1} - 1 &= 6^{n+1} - 6 + 5 \\
&= 6.6^n - 6 + 5 \\
&= 6(6^n - 1) + 5 \\
&= 6 \times 5k + 5 \quad \text{(car } P(n) \text{ est vraie)} \\
&= 5k' \quad \text{avec} \quad k' = (6k+1) \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

   Etape 3 ((Conclusion) : Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, 5 divise $6^n - 1$