Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire : 2022/2023
MATHS1 Octobre 2022

Séris de TD N°01 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n°1 . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations

1) $[(1 = -1) \vee (\sqrt{25} = 5)]$; 2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 24$;
3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*; xy \neq 0$; 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; xy = 1$;
5)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; x + y \leq 9$.

Exercice n°2 . Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrer que
$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$
2. Donner la négation des propositions suivantes
(a)$P \Rightarrow Q$,
(b) $P \vee (Q \wedge R)$.
3. Considérons la proposition
$$S : \text{"}\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)\text{"}.$$
a) Donner la négation de la proposition S.
b) Montrer que la proposition S est vraie.

Exercice n°3 .

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Montrer par contraposition que
$$y \neq -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x - y}{x + y} \neq 7.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que
$$\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}.$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En utilisant le raisonnement direct, montrer que
$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0.$$

Exercice n°4 . En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, 5 divise $6^n - 1$.