

Université Abderrahmane Mira de Bejaia
Faculté des sciences humaines et sociales
Département des sciences sociales

Intitulé du module
Statistique descriptive

Destiné aux étudiants de la première année

Semestre 1

Cours préparés par
Dr AMOUR-Mustapha

q

Cours 6 :Les caractéristiques de tendance centrale

Définition : Les mesures de tendance centrale ont des valeurs autour desquelles gravitent les différentes valeurs de la série. Elles nous donnent une idée sur l'ordre de grandeur des données.

A. Le mode :(M_o)

Le mode d'une variable statistique x est la valeur x_i qui correspond à la ou l'effectif le plus élevé, notée M_o . C'est donc la valeur de la variable qui se rencontre le plus fréquemment.

Si x est une variable continue on parle de classe modale.

1. Cas d'une variable qualitative :

Exemple1 : On veut calculer le mode pour les données de la variable "degré de motivation" face aux études universitaires.

Degrés de motivation	Très-faible	Faible	Moyen	Elevé	Très-élève	Total
effectifs	3	5	6	20	16	50

L'effectif le plus élevé est **20**, il correspond au mode $M_o = \text{Elevé}$

2. Cas d'une variable quantitative :**A. Cas d'une variable discrète :****Exemple 2 :**

Une enquête sur l'âge des élèves candidats à l'examen du bac a donné les résultats suivants :

Âges X_i	16	17	18	19	20	Total
Effectifs n_i	100	400	200	180	120	1000

L'effectif le plus élevé est **400**, il correspond au mode $M_o = 17$

Exemple 3 :

A l'occasion d'une collecte de sang dans un centre commercial, on a demandé à un échantillon de 55 donneurs, combien de dons de sang, il avait déjà fait ?

Nombre de dons	12	14	16	18	20	25	29	Total
Effectifs	3	6	10	16	11	06	03	55

L'effectif le plus élevé est **16**, il correspond au mode $M_o = 18 \text{ dons}$

B. Cas d'une variable continue :

Lorsque la variable est continue, la détermination du mode est beaucoup moins précise. En effet, les valeurs prises par la variable étant regroupées en classe, on parle tout simplement de classe modale désignant par-là la classe qui a le plus grand effectif.

$$Mo = Xmin + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} \times ai$$

Mo : mode

X min : la borne inferieure de la classe modale

ai : l'amplitude de la classe modale

(Δ1): L'effectif qui précède la classe modale

(Δ2) : L'effectif qui suit la classe modale

Exemple 4 :

Classes Xi	[3-5[[5-7[[7-9[[9-11[[11-13[Total
Effectifs ni	3	10	20	15	7	53
ai	2	2	2	2	2	2

$$Mo = Xmin + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} \times ai$$

X min : 7

(Δ1)= 10

$$Mo = 7 + \frac{10}{10+5} \times 2 = 8,33$$

(Δ2) = 5

ai =2

Exemple 5 : La série suivante représente la taille de 105 étudiants

classes Xi	[120-130[[130-140[[140-150[[150-160 [[160-170[[170-180[Total
Effectifs ni	6	21	45	55	26	07	160
ai	10	10	10	10	10	10	/

$$Mo = Xmin + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} \times ai$$

Mo : mode

Xmin : la borne inferieure de la classe modale (**150**)

ai : l'amplitude de la classe modale (**10**)

(Δ1) L'écart ou la différence entre la classe modale est la classe qui la précède (**55-45=10**)

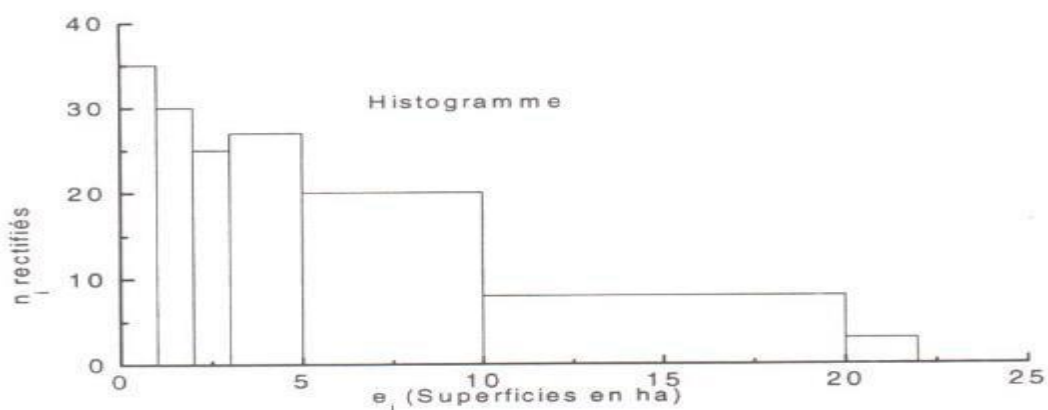
(Δ2) L'écart ou la différence entre la classe modale est la classe qui la suit (**55-26=29**)

$$Mo = 150 + \frac{10}{10 + 29} \times 10 = 152,26 \text{ cm}$$

Exemple 6 : la série suivante représente la répartition des exploitations agricoles selon leurs superficies évaluées en Hectare.

Tableau : La répartition des 330 exploitations selon leur superficie

X_i	N_i	a_i	$d_i = n_i/a_i$ (ni rectifiés)
[0-1[35	1	35
[1-2[30	1	30
[2-3[25	1	25
[3-5[54	2	27
[5-10[100	5	20
[10-20[80	10	8
[20-22[6	2	3
Total	330	-	-



$$M_o = X_{min} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times a_i$$

$X_{min} : 0$

(Δ_1): $35-0=35$

$$M_o = 0 + \frac{35}{35+65} \times 1 = 0,87 \text{ Ha}$$

(Δ_2) : $35+30= 65$

$a_i = 1$

Remarque : Lorsque les classes sont inégales, k correspond à l'amplitude de la classe modale en question.

B. La médiane : (Me)

Définition : La médiane que l'on note (Me) correspond à la variable statistique qui partage la population en deux parties égales. Les valeurs de la série statistique étant au préalable classées dans l'ordre croissant ou décroissant.

1- Cas d'une variable quantitative :

a) **Cas d'une variable discrète :**

Exemple 3 : Répartition de 210 familles selon le nombre téléviseurs

X_i	N_i	$n_i \uparrow E_{cc}$	$n_i \downarrow E_{cd}$
1	30	30	210
2	80	110	180
3	70	180	100
4	20	200	30
5	10	210	10
Total	210	/	/

On doit d'abord donner la série statistique dans l'ordre croissant.

La médiane partage la population en deux parties égales :

$$\frac{N}{2} = \frac{210}{2} = 105^{\text{ème}} \text{ Observations}$$

Me = 2 téléviseurs par famille

a) **Cas d'une variable continue :**

Exemple 3 : Répartition de 120 logements selon leur superficie en m².

Superficie X_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	$n_i \uparrow E_{cc}$	$n_i \downarrow E_{cd}$
[50-70[10	0,083	10	120
[70-90[20	0,166	30	110
[90-110[35	0,291	65	90
[110-130[42	0,35	107	55
[130-150[13	0,108	120	13
Total	120	1	/	/

Utilisons la colonne des Effectifs cumulés croissants

30 logements ont une superficie inférieure à 90 m²

65 logements ont une superficie inférieure à 110 m²

Or nous cherchons la superficie du 65^{ème} logement $60 = \frac{120}{2} = \frac{\text{effectif total}}{2}$

Le nombre 60 étant compris entre 30 et 65

La superficie médiane est comprise entre 90 m² et 110 m²

Pour trouver la longueur de la 65^{ème} observation, nous procédons de la manière suivante :

$$Me = X_{min} + \frac{\frac{N}{2} - \int_{me-1}}{n_i} \times a_i$$

$$Me = 90 + \frac{60 - 30}{35 - 30} \times 20 = 107,14m^2$$

Cours 7 :

C. Les moyennes

1. La moyenne arithmétique

Définition : La moyenne arithmétique est noté \bar{X} d'une variable statistique est égale à la somme des valeurs prise par cette variable statistique, divisée par le nombre d'observations.

1-Cas d'une variable quantitative :

a)-Cas d'une variable discrète :

On la note par x ou μ telle que $x = \frac{1}{n} \sum x_i$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Exemple 1 : la moyenne arithmétique des nombres : 11. 10 5. 12. 13. 8. 7 est :

$$\bar{X} = \frac{11+10+5+12+13+8+7}{7} = \frac{66}{7} = 9.43$$

Exemple 2 : supposons que 7 ouvriers aient reçu les primes suivantes

830- 830- 960- 960- 90- 1070- 1070

Exemple 3 : supposons que 7 ouvriers aient reçu les primes suivantes

830- 830- 960- 960- 90- 1070- 1070

Xi	830	960	1070	Total
Ni	2	3	2	7
xi.ni	1660	2880	2140	6680

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n_i} = \frac{6680}{7} = 954,30 \text{ Da}$$

La moyenne arithmétique est dite simple car chaque valeur correspond à un individu et par opposition la moyenne arithmétique pondérée.

b)-Cas d'une variable continue :

La moyenne arithmétique pondérée : Soit une variable statistique dont les différentes modalités : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ auxquelles correspondent respectivement les effectifs : $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ avec : $n_1 + n_2 + n_3, \dots + n_k = n$

La moyenne arithmétique pondérée de telle variable est :

$$\bar{X} = \frac{(x_1 \times n_1) + (x_2 \times n_2) + (x_3 \times n_3) \dots + (x_k \times n_k)}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i \times n_i$$

Ou encore : $\bar{X} = \sum \frac{ni}{n} \times xi = \sum fi \times xi$

Remarque :

Si x est une variable continue alors $x = \frac{1}{n} \sum ni \times ci$, avec ci centre de classe.

Exemple 4 : Répartition des sportifs selon leur poids.

poids en kg xi	nombre d'individus ni	ci	$ni \times ci$
[56-58[5	57	285
[58-60[36	59	2124
[60-62[40	61	2440
[62-64[15	63	945
[64-66[4	65	260
total	100	/	6054

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum ni \times ci = \frac{1}{100} (5 \times 57) + (36 \times 59) + (40 \times 61) + (15 \times 63) + (4 \times 65) = 60,54$$

Ou bien :

$$\bar{X} = \frac{\sum ni \times ci}{ni} = \frac{6054}{100} = 60,54 \text{ kgs}$$

2. La moyenne géométrique :

Définition : La moyenne géométrique simple G d'une série de n valeurs : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ est la racine $n^{\text{ième}}$ du produit de ces valeurs.

a)-Cas d'une variable discontinue :

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \dots \times x_n}$$

En prenant le logarithme des deux membres on obtient :

$$\log G = \frac{1}{n} \sum \log xi$$

Exemple 1 :

La moyenne géométrique des valeurs 2, 3, 8, 11, 17 est : $G = \sqrt[5]{2 \times 3 \times 8 \times 11 \times 17} = 6.17$

Exemple 2 :

Partons du tableau statistique suivant :

x_i	n_i
1.08	3
1.07	2
1.09	5
Total	10

Et calculons la moyenne arithmétique prise par la variable x

x_i	n_i	$x_i n_i$
1,08	3	3,24
1,07	2	2,14
1,09	5	5,45
Total	10	10,83

$$m = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{10,83}{10} = 1,083$$

x_i	n_i	$\log x_i$	$n_i \log x_i$
1,08	3	0,03342	0,10026
1,07	2	0,02938	0,05876
1,09	5	0,03743	0,18715
Total	10	/	0,34617

$$\log G = \frac{\sum n_i \times \log x_i}{\sum n_i} = \frac{0,34617}{10} = 0,034617$$

D'où $G = 1,08297$

b)- Cas d'une variable continue :

Exemple 3 : Répartition des boxeurs selon leur poids(Kgs)

X_l	n_i	C_i	Lnc_i	$n_i \times Lnc_i$
[53-63[10	58,5	4,06	40,6
[63-72[22	67,5	4,21	92,62
[72-81[34	76,5	4,33	147,22
[81-90[13	85,5	4,44	57,72
[90-99[14	94,5	4,54	63,56
[99-108[5	103,5	4,63	23,15
Total	98	/	/	424,87

$$\log G = \frac{\sum n_i \times \log x_i}{\sum n_i} = \frac{424,87}{98} = 4,33$$

D'où $G = e^x$
 $e^{4,33} = 76,95\text{kgs}$

3. La moyenne harmonique :

Définition : La moyenne harmonique simple H d'une série de n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des valeurs

a) cas d'un variable discrète :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Si on a une variable statistique ayant k valeurs x_1, x_2, \dots, x_k aux quelles correspondent respectivement les effectifs : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, alors la moyenne harmonique pondérée de ces valeurs est :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum \frac{n_i}{x_i}} = \frac{n}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$$

Exemple 1 :

La moyenne harmonique des valeurs 1, 4 ; 8 ; 10 ; 12 ; est

$$H = \frac{5}{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \frac{5}{\sum \frac{1}{x_i}} =$$

x_i	1	4	8	10	12	Total
$\frac{1}{x_i}$	1	0,25	0,125	0,1	0,083	1,55

$$H = \frac{5}{1,55} = 3,2$$

Exemple 2 : Répartition de 105 familles selon le nombre d'enfants

X_i	N_i	$\frac{n_i}{x_i}$
1	25	25
2	30	15
3	28	9,33
4	22	5,5
Total	105	54,83

$$H = \frac{n}{\sum \frac{n_i}{x_i}} = \frac{105}{54,83} = 2 \text{ enfants}$$

b) cas d'un variable continue :

$$H = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{c_i}}$$

Exemple 3 : Répartition de 120 logements selon leur superficie (m²)

Superficie X_i	Effectifs n_i	c_i	$\frac{n_i}{c_i}$
[50-70[10	60	0,16
[70-90[20	80	0,25
[90-110[35	100	0,35
[110-130[42	120	0,35
[130-150[13	140	0,09
Total	120	/	1,2

$$H = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{c_i}} H = \frac{120}{1,2} = 100\text{m}^2$$

Cours 8 :

Les caractéristiques de dispersion

a) Pourquoi des caractéristiques de dispersion ?

Imaginons que nous ayons à calculer les salaires horaires accordés à leurs ouvriers par deux établissements différents qui compte chacun 5 salariés.

Les indications suivantes sont fournies, les mesures des salaires, exprimés en dinars, ayant été rangées dans l'ordre croissant :

Etablissement A : 80 81 84 86 90

Etablissement B : 70 78 84 92 97

Notre comparaison nous conduit d'abord à la détermination des caractéristiques de valeur centrale des deux séries proposées :

$$\text{lamoyennearithmétiqueA: } \frac{80 + 81 + 84 + 86 + 90}{5} = 84,2 \text{ dinars}$$

$$\text{lamoyennearithmétiqueB: } \frac{70 + 78 + 84 + 92 + 97}{5} = 84,2 \text{ dinars}$$

Les deux distributions ont aussi une médiane ; 84 dinars

Nous constatons que les deux établissements accordent des salaires dont les distributions ont les mêmes caractéristiques de valeur centrale

On ne peut cependant conclure que les deux entreprises considérées accordent des salaires horaires comparables. Dans l'établissement B, les mesures des salaires sont plus étalées, plus dispersées que dans l'établissement A.

Nous retenons alors le besoin de définir et de calculer les caractéristiques de dispersions qui permettront de mesurer cette dispersion, et ainsi de pouvoir comparer des distributions comme les deux précédentes pour lesquelles les caractéristiques de valeur centrale se sont avérées être des instruments insuffisants.

Définition : une caractéristique de dispersion est un nombre qui permet d'estimer dans quelle mesure des observations s'écartent les unes des autres (ou s'écartent de leur valeur centrale).

b) L'étendue (rang ou intervalle de variation)

Définition: L'étendue notée R est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par la variable statistique, classées préalablement dans l'ordre croissant ou décroissant

1) Cas d'une variable discontinu ou discrète :

Dans le cas d'une série discontinu, l'étendue ne pose pas de problèmes de calcul.

Nous avons : $R = X_{\max} - X_{\min}$

Exemple 1 : Soit les 2 séries de notes obtenues par 10 étudiants lors de deux examens (séries proposées précédemment).

0 7 7 7 7 7 7 10 11

3 4 5 6 7 7 8 9 10 11

- Dans la première distribution, l'étendue est égale à :

$R = (11 - 0) = 11$ points

- Dans la deuxième distribution, l'étendue est égale à :

$R = (11 - 3) = 8$ points

Exemple 2 : Dans une petite localité, on a relevé le nombre de pièces par appartement.

Tableau : Distribution des 316 appartements selon le nombre de pièces

X_i	n_i	$n_i \uparrow E_{cc}$	$n_i \downarrow E_{cd}$
1	48	48	316
2	72	120	268
3	96	216	196
4	61	277	100
5	39	316	39
Total	316	/	/

Dans ce cas, l'étendue est égale à : $R = (5 - 1) = 4$ pièces par appartements.

2) Cas d'une variable continue :

Exemple 3 : La variable statistique X_i représente la taille en centimètre des élèves d'une école.

X_i	n_i	$n_i \uparrow E_{cc}$	$n_i \downarrow E_{cd}$
[120-130[6	6	153
[130-140[21	27	147
[140-150[45	72	126
[150-160[55	127	81
[160-170[26	153	26
Total	153	/	/

Dans ce cas, l'étendue est égale à : $R = (170 - 120) = 50$ cm.

C. L'intervalle interquartile :

Définition : L'intervalle interquartile est l'intervalle qui contient 50% des observations, en laissant 25% des observations de part et d'autre de l'intervalle.

On appelle premier quartile (ou quartile inférieur) d'une distribution statistique ; et on désigne Q_1 , la valeur telle que 25% des valeurs prise par la variable, donc 25% de l'effectif total étudié, lui soient inférieures , et 75% supérieures.

On appelle troisième quartile (ou quartile supérieur) d'une distribution statistique ; et on désigne Q_3 , la valeur telle que 75% des valeurs prise par la variable lui soient inférieures, et 75% supérieures et 25% supérieures.

En conséquence de ces définitions le second quartile Q_2 , se confond évidemment avec la valeur médiane.

L'intervalle interquartile est la différence du troisième et du premier quartile.

$$\text{L'intervalle interquartile} = Q_3 - Q_1$$

Un quart des effectifs présentant des valeurs de la variable inférieures au premier quartile, et un quart de ces effectifs présentant des valeurs de la variable supérieures au troisième quartile.

L'intervalle interquartile contient des valeurs de la variable présentées par la moitié centrale des effectifs observés.

Exemple 1 : On considère les salaires horaires de 250 salariés dans une entreprise.

Ages X_i	effectif n_i	$n_i \uparrow$ E cc
[80-84[10	10
[84-88[30	40
[88-90[60	100
[90-92[72	172
[92-96[40	212
[96-102[24	336
[102 - 109[14	250
Total	250	/

Détermination des quartiles Q_3 et Q_1 et de l'intervalle interquartile.

Utilisons la colonne des effectifs cumulés croissants

Le premier quartile Q_1 et le salaire correspondant à la 62,5^e observation

$$\left(250 \times \frac{25}{100} = 62,5\right)$$

Les observations étant rangées par ordre de valeurs croissantes, il se situe dans l'intervalle [88 – 90[

$$Q_1 = 88 + (90 - 88) \frac{62,5 - 40}{100 - 40} = 88,75 \text{ DA}$$

Le troisième quartile est le salaire correspondant à la 187,5^e observation.

$$\left(250 \times \frac{75}{100} = 187,5\right)$$

Les observations étant rangées par ordre de valeurs croissantes, il se situe dans l'intervalle [92 – 96[

$$Q_3 = 92 + (96 - 92) \frac{187,5 - 172}{212 - 172} = 93,55 \text{ DA}$$

L'intervalle interquartile $Q_3 - Q_1$ est donc $93.55 - 88.75 = 4,8 \text{ DA}$

Cours 9 :

D. L'écart moyen :

Définition: L'écart moyen absolu que l'on note $ea(x)$ est la moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts entre la valeur prise par la variable statistique X et une valeur type choisie qui est généralement la moyenne.

1) Cas d'une variable discrète :

$$ea(x) = \frac{\sum ni/xi - \bar{X}}{\sum ni} \text{ ou } e = \sum /xi - m/fi$$

Exemple 1 : Répartition de 100 familles selon le nombre de voitures par famille.

Xi	effectif n_i	$ni \cdot xi$	$/xi - \bar{X}/$	$ni /xi - \bar{X}/$
1	20	20	2	40
2	30	60	1	30
3	20	60	0	0
4	20	80	1	2
5	10	50	2	20
Total	100	270	/	110

$$\bar{X} = \frac{\sum ni \times xi}{ni} = \frac{270}{100} = 2,7 \approx 3$$

$$ea(x) = \frac{110}{100} = 1 \text{ voiture}$$

2) Cas d'une variable continue :

Exemple 2 : On considère les âges dans une association charitable.

Ages Xi	effectif n_i	ci	$ni \cdot ci$	$/ci - \bar{X}/$	$ni /ci - \bar{X}/$
[30-40[14	35	490	27	378
[40-50[17	45	765	17	289
[50-60[21	55	1155	7	147
[60-70[42	65	2730	3	126
[70-80[24	75	1800	13	312
[80-90[18	85	1530	23	414
Total	136	/	8470	/	1666

On calcul d'abord la moyenne arithmétique :

$$\bar{X} = \frac{\sum ni \times ci}{\sum ni} = \frac{8470}{136} = 62,27 \approx 62$$

$$ea(x) = \frac{\sum ni/ci - \bar{X}}{\sum ni} ea(x) = \frac{1666}{136} = 12,25$$

E. Variance :

Définition : La variance est la moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs de la variable à leur moyenne arithmétique, on la désigne par δ^2 (lire « Sigma au carré») ou par V_x .

$$\delta^2 = \frac{\sum ni(ci - \bar{X})^2}{\sum ni} = \sum (x_i - \bar{X})^2 fi$$

Exemple 3 : La variable statistique X_i représente la taille en centimètre des élèves d'une école.

Ages X_i	effectif n_i	ci	$ni \cdot ci$	$/ci - \bar{X}/$	$ni (ci - \bar{X})^2$
[120-130[06	125	750	26	4056
[130-140[21	135	2835	16	5376
[140-150[45	145	6525	6	1620
[150-160[55	155	8525	4	880
[160-170[26	165	4290	14	5096
[170-180[07	175	1225	24	4032
Total	160	/	24150	/	21060

$$\delta^2 = \frac{\sum ni(ci - \bar{X})^2}{\sum ni} = \frac{21060}{160} = 131,62 \text{ cm}$$

F. L'écart type :

Définition : Désigné par δ est la racine carrée positive de la variance.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum ni(ci - \bar{X})^2}{\sum ni}}$$

Exemple 4 : Reprenons la série représentant la taille en centimètre des élèves d'une école.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum ni(ci - \bar{X})^2}{\sum ni}} = \sqrt{\frac{21060}{160}} = \delta = \sqrt{131,62} = 11,47 \text{ cm}$$