Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ année ST
Année universitaire
2022 / 2023

Série de TD n°3 : Applications

Exercice n°1

Propriétés Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient $A_1, A_2 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$, montrer que
1. $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
3. $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Exercice n°2

Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

1. f, g sont- elle injective ? surjective ?
2. A- t- on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.
3. Calculer $f(\{0,1\}), f^{-1}(\{5\}), f([0,1]), f(\mathbb{R}), f^{-1}([5,7])$.
4. Calculer $g^{-1}(\{1\})$, $g([-4,4])$, $g^{-1}([-4,-1])$ et $g^{-1}([0,4[)$.

Exercice n°3

Considérons l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

1. Calculer $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.
2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
3. Donner des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Exercice n°4

Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifions que pour tout réel a non nul on a : $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$. Que peut-on déduire ?
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle

$$I = [1, +\infty[\text{par } f(x) = h(x).$$

a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0,2]$ et déterminer la fonction réciproque $f^{-1}(x)$.