Chapitre 3: Analyse des séries temporelles

L'analyse des séries temporelles a considérablement évolué ces dernières décennies : les progrès méthodologiques alliés à l'utilisation banalisée des logiciels font que la présentation et l'enseignement de cette discipline a connu de profonds bouleversements. Ce chapitre a pour but de familiariser les étudiants avec le traitement d'une série chronologique de type additive et multiplicative.

I-Définition et composantes d'une série temporelle

1-1- Définition d'une série temporelle (chronologique)

Une série temporelle (ou chronologique) est une suite (Y_t) d'observations chiffrées d'un même phénomène, ordonnées dans le temps [1]. Une série temporelle ou encore chronique est une succession d'observations au cours du temps représentant un phénomène économique (prix, ventes...) ; par hypothèse, le pas du temps est considéré constant : l'heure, le jour, le mois, le trimestre, l'année[2].

Les dates d'observations sont généralement ordonnées de manière régulière dans le temps La périodicité des observations est variable : mensuelle (p =12) comme les ventes d'une société, trimestrielle (p = 4) comme la consommation trimestrielle d'électricité, semestrielle (p =2)….

1-2- Les composantes d'une série temporelle

L'objectif de la décomposition d'une série chronologique est de distinguer dans l'évolution de la série, une tendance « générale », des variations saisonnières, et des variations accidentelles imprévisibles. [3]Cela permet de mieux comprendre, de décrire l'évolution de la série et de prévoir son évolution (à partir de la tendance et des variations saisonnières).[4]

1-2-1- La tendance (trend) Tt

La tendance représente l'évolution à long terme de la série étudiée, l'évolution fondamentale de la série. Elle traduit le comportement moyen de la série (tendance à la hausse ou à la baisse).

1-2-2- La saisonnalité St

[1] Florence NICOLEAU, (2006), « séries chronologiques », Polycopié de cours, IUT de Nice Côte d'Azur, Département STID, 2005/2006, p 1.

[3] On peut distinguer aussi la composante cyclique sui est une variation se trouvant généralement dans les séries de longue durée et traduit des phases successives de croissance et de récession qui constitue le cycle économique

[4] Florence NICOLEAU(2006), *Op.cit.*, p 4.

Les variations saisonnières sont des fluctuations périodiques à l'intérieur d'une année, et qui se reproduisent de façon plus ou moins permanente d'une année sur l'autre. Elle correspond au phénomène qui se répète à un intervalle de temps régulier (périodique).

Exemple : quasi stagnation entre le 1° et le 3° trimestre forte augmentation au 4° trimestre.

1-2-3- La composante résiduelle (résidus, erreur) et

Ce sont des fluctuations accidentelles irrégulières dues par exemple aux : guerre, grèves….elle sont de nature aléatoire. Elles sont supposées en général de faible amplitude..

1-3 Les tests de détection de la saisonnalité

1.3.1 La représentation graphique et le tableau de Buys-Ballot

L'analyse graphique d'une chronique suffit, parfois, pour mettre en évidence une saisonnalité. Néanmoins, si cet examen n'est pas révélateur ou en cas de doute, le tableau de Buys-Ballot permet d'analyser plus finement l'historique.

Le tableau de Buys-Ballot est un tableau à deux entrées dans lequel sont consignées les valeurs de x. Il est constitué en ligne par les années et en colonne par le facteur à analyser (mois, trimestre...). Les moyennes et les écarts types des années et des trimestres (ou des mois selon le cas) sont calculés ainsi que pour l'ensemble des observations de la chronique.

1.3 .2. Analyse de la variance et test de Fisher

L'examen visuel du graphique ou du tableau ne permet pas toujours de déterminer avec certitude l'existence d'une saisonnalité, de surcroît il interdit l'automatisme de traitement qui peut s'avérer nécessaire dans le cas d'un nombre important de séries à examiner. Le test de Fisher à partir de l'analyse de la variance permet de pallier ces deux inconvénients.

Ce test suppose la chronique sans tendance ou encore sans extra saisonnalité. Dans le cas contraire cette composante sera éliminée par une régression sur le temps (extra-saisonnalité déterministe), ou par une procédure de filtrage (extra-saisonnalité aléatoire).[5]

Soit : N le nombre d'années, p le nombre d'observations (la périodicité) dans l'année (trimestre p = 4, mois p = 12, etc.).

x_{ij} la valeur de la chronique pour la i-ème année (i = 1, ..., N) et la j-ème période (j = 1, ..., p) supposée telle que $x_{ij} = m_{ij} + e_{ij}$; les e_{ij} sont les résidus considérés comme aléatoires formés d'éléments indépendants : $e \rightarrow N(0 ; \sigma^2)$. Les m_{ij} sont les éléments d'une composante de la chronique qui s'écrivent : $m_{ij} = a_i + b_j$ avec b_j qui mesure l'effet période en colonne du tableau et a_i qui mesure l'effet année en ligne du tableau.

[5] Regis Bourbounis et Michal Thereza (1998), *Analyse des séries temporelles en économie*, Press Universitaire de France , p 17.

Deux effets absents sont testés contre deux effets significativement présents :

- si l'effet période est significatif, la série est saisonnière ;
- si l'effet année est significatif, ceci suggère deux interprétations.

1. La chronique de départ n'a pas été transformée, elle possède alors des paliers horizontaux.
2. La chronique a été transformée, des changements de tendance existent dans la chronique.

Le déroulement du test est le suivant : [6]

a) Calcul de la variance totale du tableau

Soit S_T la somme totale des carrés : $S_T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x_{..})^2$

Avec $x_{..} = \frac{1}{N.p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij})$ la moyenne générale de la chronique sur les N. p observations.

$x_{i.} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} x_{ij}$ la moyenne de l'anneé i

$x_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ij}$ la moyenne de la periode j

Analyse de la variance pour détecter une saisonnalité et/ou une tendance.

Somme des carrés	Degré de liberté	Désignation	Variance
$SP = N_j \sum_{j=1}^{P} (X_{.j} - X_{..})^2$	P-1	Variance période	$V_P = \frac{SP}{P-1}$
$S_A = P \sum_{i=1}^{N} (X_{i.} - X_{..})^2$	N-1	Variance année	$V_A = \frac{SA}{N-1}$
$S_A = ST - SA - SP$	(P-1)(N-1)	Variance résiduelle	$V_R = \frac{SR}{(P-1)(N-1)}$
		Variance totale	$V_T = V_P + V_A + V_R$

Source : Abderrahmani Fares (2018), p.11 et Regis Bourbounis et Michal Thereza (1998)

b) Test de l'influence du facteur colonne (période, mois ou trimestre : Ho = pas d'influence)

Calcul du Fisher empirique $F_c = \frac{V_P}{V_R}$

$F^{\alpha}_{v1;v2}$ à $v_1 = p - 1$ et $v_2 = (N-1)(p-1)$ degrés de liberté

Si le Fisher empirique est supérieur au Fisher lu dans la table, on rejette l'hypothèse H0, la série est donc saisonnière.

c) Test de l'influence du facteur ligne (année : Ho = pas d'influence)

Calcul du Fisher empirique $F_c = \frac{V_A}{V_R}$ que l'on compare au Fisher lu dans la table

[6] Regis Bourbounis et Michal Thereza (1998), *Op.cit.*, p.18

$F^{\alpha}{}_{v3;v\,2}$ à v_3 = N -1 et v_2 = (N -1) (p -1) degrés de liberté

Si le Fisher empirique est supérieur au Fisher lu, on rejette l'hypo- thèse Ho, la série est donc affectée d'une tendance.

Ces étapes sont synthétisées dans le tableau ci-après

	Test de la tendance	Test de saisonnalité
Les hypothèses	H_0 : la série n'a pas de tendance H_1 : la série possède une tendance	H_0 : la série n'a pas de saisonnalité H_1 : la série possède une saisonnalité
La statistique du test	:$F_c = \frac{V_A}{V_R}$	$F_c = \frac{V_P}{V_R}$
La règle de décision	Si $F_c > F_{(V1,V2)}$ on accepte H_1 Si $F_c \leq F_{(V1,V2)}$ on accepte H	Si $F_c > F_{(V3,V4)}$ on accepte H_1 Si $F_c \leq F_{(V3,V4)}$ on accepte H_0
Le degré de liberté	V1=N-1 et V2=(P-1)(N-1)	V3=P-1 et V4=(N-1)(P-1)

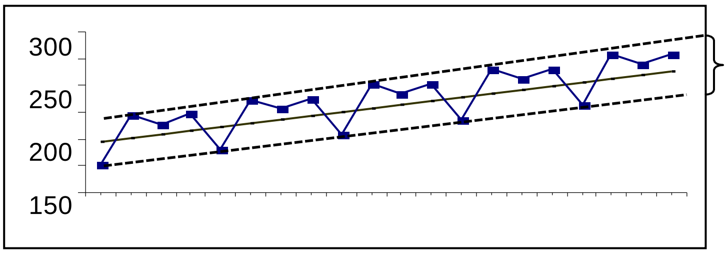
Source : ABDERRAHMANI F, (2018) « Guide pratique des séries temporelles macro-économiques et financières avec eviews 9.5 », *polycopié de cours à caractère pédagogique*, université de Bejaia, p.11.

II- Modèles de décomposition d'une série chronologique

2-1 Modèle de décomposition d'une série chronologique

La technique de décomposition-recomposition repos sur un modèle qui l'autorise. Ce modèle porte le nom de schéma de décomposition. Il en existe essentiellement trois grands types :[7]

- Le schéma additif qui suppose l'orthogonalité (indépendance) des différentes composantes. Il s'écrit : x = $T_t + S_t + C_t + e_t$. Dans ce schéma la saisonnalité est rigide en amplitude et en période. Le modèle additif est engendré par deux lignes parallèles. L'amplitude de variation dans le modèle additif est constante.



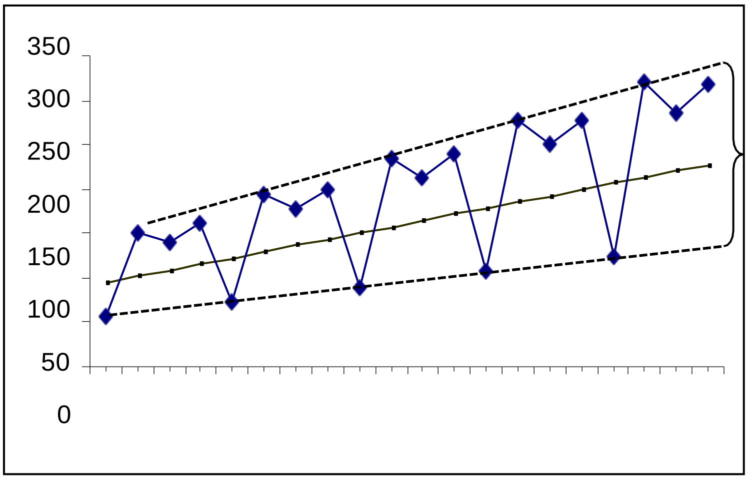
- Le schéma multiplicatif : Xt = Tt * St + et, dans lequel la composante saisonnière est liée à l'extra-saisonnier (saisonnalité souple avec variation de l'amplitude au cours du temps). Graphiquement, l'amplitude des variations (saisonnières) varie

- Le schéma multiplicatif complet : Xt = Tt * St * et (interaction générale des trois composantes). Il est actuellement le plus utilisé en

[7]Regis Bourbounis et Michal Thereza (1998), *Op.cit*,p .16

économie. Il est commode puisque le logarithme de la chronique conduit au schéma additif. Dans le cas d'une série (Yt) à valeurs positives, ce 2e modèle multiplicatif se ramène à unmodèle additif en considérant la série (ln(Yt)) : $\ln(Yt) = \ln(Ct) + \ln(St) + \ln(\varepsilon t)$.

- La seule différence entre les 2 modèles multiplicatifs est dans l'estimation des εt , qui n'apas une grande importance.



2-2. Les tests de décomposition

2.1 Le test de la bande

Le « test de la bande » consiste à partir de l'examen visuel du graphique de l'évolution de la série brute à relier, par une ligne brisée, toutes les valeurs « hautes » et toutes les valeurs « basses » de la chronique. Si les deux lignes sont parallèles, la décomposition de la chronique peut se faire selon un schéma additif ; dans le cas contraire, le schéma multiplicatif semble plus adapté.[8]

2.2. Le test de Buys-Ballot

Le test de Buys-Ballot est fondé sur les résultats du tableau 1 (calcul des moyennes et des écarts-types par année). Le schéma est, par définition, additif si l'écart-type et la moyenne sont indépendants ; il est multiplicatif dans le cas contraire. Lorsque le nombre d'années est suffisant, nous pouvons estimer par la méthode des MCO les paramètres de l'équation. Dans le cas, où le coefficient a1 n'est pas significativement différent de 0 (test de Student) alors on

---

[8] Regis Bourbounis et Michal Thereza (1998), *Op.cit.*

accepte l'hypothèse d'un schéma additif ; dans le cas contraire, nous retenons un schéma multiplicatif.

III. Dessaisonalisation des séries chronologiques

3.1 Construction des séries corrigées des variations saisonnières ou séries CVS.

La correction des variations saisonnières suppose que certaines hypothèses soient vérifiées et cela dans le but de simplifier certaines écritures.[9]

Les hypothèses :

*1.1.1.1. **Hypothèse 1: La décomposition de la série***

Nous admettrons que la série chronologique n'est constituée que de trois composantes, qui sont : la tendance notée $\mathbf{T_t}$, la saisonnalité notée $\mathbf{S_t}$ et le résidu noté $\mathbf{R_t}$

*1.1.1.2. **Hypothèse 2: Les modèles***

Nous nous intéresserons à trois types de modèles :

- le modèle additif,

$$y_t = T_t + S_t + R_t$$

- le modèle multiplicatif général,

$$y_t = T_t\ (1+S_t) + R_t$$

- le modèle multiplicatif particulier de la forme :

$$y_t = T_t*S_t*R_t$$

ce dernier modèle devient additif lorsque nous appliquons un logarithme :

$$\ln(y_t) = \ln(T_t) + \ln(S_t) + \ln(R_t)$$

Si nous posons le changement de variable :

$$y'_t = \ln(y_t) \qquad T'_t = \ln(T_t) \qquad S'_t = \ln(S_t) \qquad R'_t = \ln(R_t)$$

alors le modèle peut être traité de façon additive :

$$y'_t = T'_t + S'_t + R'_t$$

*1.1.1.3. **Hypothèse 3: La composante tendancielle***

---

[9] Jean-Louis MONINO - Jean-Michel KOSIANSKI - François LE CORNU , Travaux diriges – statistique descriptive – Polycopier de cours

Nous admettons que l'opérateur moyenne mobile laisse passer la composante tendancielle sans la modifier si la tendance est un polynôme de degré au plus égal à un de la forme :

$$T_t = a\,t + b$$

*1.1.1.4. **Hypothèse 4: La composante saisonnière***

La saison est rigoureusement identique de période en période, hypothèse que l'on écrit de la façon suivante :

$$S_t = S_{ij} = S_j \quad \text{avec} \quad S_{t+p} = S_{i+1,j} = S_j \quad \text{avec} \quad j = 1,....,p$$

Il y a compensation des p composantes saisonnières S_j . Nous pouvons écrire cette hypothèse sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{j=p} S_j = 0$$

Cette hypothèse est également connue sous le nom de compensation des aires.

1.1.1.5. Hypothèse 5 : La composante résiduelle

Les variations résiduelles possèdent les propriétés suivantes :

$$\overline{R} = 0 \qquad\qquad S_R^2 \approx 0$$

La moyenne mobile appliquée aux variations résiduelles a des fluctuations très faibles autour de zéro.

$$mm_t^p(R) \approx 0$$

3.2 Le calcul des coefficients saisonniers et la correction des variations saisonnières des séries chronologiques

Plusieurs étapes sont nécessaires pour trouver les coefficients saisonniers et corriger les séries chronologiques des variations saisonnières :

1.2.1. ETAPE 1: *La représentation graphique*

La série chronologique est représentée pour observer les trois composantes de la série et éventuellement pour repérer les points aberrants.

1.2.2. ETAPE 2 : *Les corrections des points aberrants*

Cette étape consiste à éliminer par un calcul simple les points aberrants pour qu'ils ne soient pas pris en compte dans les calculs. Estimation graphique, ou estimation par une moyenne ou par toute autre méthode. Nous retiendrons comme méthode la demi-somme des deux points qui encadrent le point aberrant.

1.2.3. ETAPE 3 : *Le choix du modèle*

Nous déterminerons le type de modèle à utiliser pour la correction des variations saisonnières. Deux grands modèles sont à notre disposition ; le modèle additif ou multiplicatif. Plusieurs méthodes: La méthode du profil, La méthode de la bande, La méthode du tableau de Buys-Ballot.

1.2.4. ETAPE 4 : *Le filtrage de la série*

Dans cette étape, la composante saisonnière est supprimée en appliquant un filtre. Ainsi, nous devons déterminer la longueur p de la moyenne mobile que nous devons appliquer afin d'éliminer les variations saisonnières. Nous conviendrons qu'elle doit être au moins égale à la saison de la série. Nous envisagerons deux cas :

- ***Cas d'un modèle additif***

$$y_t = T_t + S_t + R_t$$

Soit X la série des moyennes mobiles définie :

- si p est paire par:

$$mm_t^p(y_t) = x_t = \frac{1}{p}\left[\sum_{i=-k+1}^{i=k-1} y_{t+i} + \frac{1}{2}y_{t-k} + \frac{1}{2}y_{t+k}\right]$$

- si p est impaire par :

$$mm_t^p(y_t) = x_t = \frac{1}{p}\sum_{i=-k}^{i=k} y_{t+i}$$

nous calculons la série des différences saisonnières définies par :

$$d_{ij} = y_{ij} - mm_t^p(y_t) = y_t - x_t$$

Pour le mois ou trimestre j, on obtient une première approximation du coefficient saisonnier S'_j en calculant la moyenne ou la médiane des différences saisonnières. Mais l'hypothèse dite de « conservation des aires » ne peut être vérifiée puisque les coefficients saisonniers sont obtenus de façon indépendante. Ainsi, nous corrigeons les coefficients S'_j en procédant de la manière suivante :

- recherche de la moyenne des coefficients saisonniers

$$\bar{S}' = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} S'_j$$

- correction des coefficients saisonniers

$$S_j^{*} = S'_j - \bar{S}'$$

- ***Cas d'un modèle multiplicatif***

Le seul modèle multiplicatif que nous verrons sera de la forme :

$$y_t = T_t\,(1+S_t) + R_t$$

que l'on peut écrire de la façon suivante, si nous remplaçons l'indice t par sa décomposition en année et saison (cf. TD 8) :

$$y_{ij} = T_{ij}\,(1+S_j) + R_{ij}$$

Posons un changement de variable simple:

$$s_j = 1 + S_j$$

où s_j est appelé coefficient saisonnier.

Le modèle s'écrit alors de la façon suivante :

$$y_{ij} = T_{ij}\,s_j + R_{ij}$$

On calcule les rapports saisonniers

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{mm_t^p(Y)}$$

Pour le mois ou le trimestre j on obtient une première approximation du coefficient saisonnier S'j en calculant la moyenne ou la médiane des différences saisonnières.

Mais l'hypothèse dite de « conservation des aires » ne peut être vérifiée puisque les coefficients saisonniers sont obtenus de façon indépendante. Avant de corriger les coefficients saisonniers nous rappelons les hypothèses suivantes :

- Hypothèse sur les coefficients saisonniers

$$\sum_{j=1}^{p} S_j = 0$$

- Hypothèse sur la moyenne des coefficients saisonniers

$$s_j = 1 + S_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} s_j = \sum_{j=1}^{p} \left(1 + S_j\right) = p$$

Ainsi, nous pouvons maintenant corriger les coefficients S'$_j$ en procédant de la manière suivante :

- recherche de la moyenne des coefficients saisonniers

$$\bar{S}' = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} S'_j$$

- correction des coefficients saisonniers

$$S_j^{\,*} = \frac{S'_j}{\bar{S}'}$$

1.2.5. ETAPE 5 :*La série corrigée des variations saisonnières*

C'est la dernière étape de la construction des séries chronologiques corrigées des variations saisonnières. Deux cas se présentent :

1.2.5.1.Cas d'un modèle additif

La série CVS s'écrit:

$$y_{i,j}^{CVS} = y_{i,j} - S_j^*$$

1.2.5.2.Cas d'un modèle multiplicatif

La série CVS s'écrit:

$$y_{i,j}^{CVS} = \frac{y_{i,j}}{S_j^*}$$

L'objectif de ce chapitre était d'aborder essentiellement la correction des variations saisonnières des séries. Quand la série chronologique est de type déterministe, il est possible de voir sur un graphique les trois grandes composantes d'une série. Il nous faudra également connaître le type de modèle additif ou multiplicatif. Alors, nous pourrons procéder à l'élimination la composante tendancielle à l'aide du filtre des moyennes mobiles, puis estimer la composante saisonnière dans les meilleures conditions statistiques, pour enfin restituer le plus fidèlement possible la composante tendancielle et la composante saisonnière et en déduire la composante résiduelle.