Cours d' Algèbre 1

Said AISSAOUI

19 novembre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles et Applications

1.1 Applications

1.1.1 Applications réciproques

Proposition 1 (Définition) *Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.*

2. *Si f est bijective alors g est **unique** et **bijective**.*

L'application g est appelée application réciproque de f, notée f^{-1}. et de plus

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration 1.1.1.1 1. *Montrons d'abord l' équivalence .*

(a) $\Longrightarrow)$ *Supposons que f est bijective et montrons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.*

$$\begin{aligned} f \text{ bijective} &\Longrightarrow f \text{ surjective} \\ &\Longrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x). \end{aligned}$$

On pose $g(y) = x$

$$\begin{aligned} g(y) = x &\Longrightarrow f(g(y)) = f(x) = y, \forall y \in F \ (\ car\ f\ est\ une\ application). \\ &\Longrightarrow (f \circ g)(y) = y, \forall y \in F. \\ &\Longrightarrow f \circ g = Id_F. \end{aligned}$$

Montrons que $g \circ f = Id_E$.

$$\begin{aligned} f \circ g = Id_F &\Longrightarrow (f \circ g) \circ f = Id_F \circ f = f \\ &\Longrightarrow f \circ (g \circ f) = f \ (car\ la\ loi \circ est\ associative) \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, f[(g \circ f)(x)] = f(x) \\ &\Longrightarrow \forall x \in E, (g \circ f)(x) = x, (car f\ injective). \\ &\Longrightarrow g \circ f = Id_E. \end{aligned}$$

(b) $\Longleftarrow$) *Supposons que* g *existe et vérifie* $g \circ f = Id_E$ *et* $f \circ g = Id_F$ *et montrons que* f *est bijective.*

i. ***la surjectivité*** *Soit* $y \in F$, *est ce qu'il existe* $x \in E$ *tel que y=f(x) ?*
on pose $x = g(y)$ *(* x *existe car* g *est une application)*

$$\begin{aligned} x = g(y) &\Longrightarrow f(x) = f(g(y))(car f\ est\ une\ application) \\ &\Longrightarrow f(x) = (f \circ g)(y) \\ &\Longrightarrow f(x) = y, \ (car\ f \circ g = Id_F). \end{aligned}$$

d'où f *est surjective.*

ii. ***l'injectivité*** *Soient* $x_1, x_2 \in E$, *si* $f(x_1) = f(x_2)$ *est ce qu'on aura* $x_1 = x_2$ *?*

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \\ &\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \ \ (car g \circ f = Id_E) \end{aligned}$$

d'où f *est injective.*

2. *Si* f *est bijective alors* g *l'est aussi. en effet*

$$\begin{aligned} g \circ f = Id_E &\Longrightarrow g \circ f\ \ est\ surjective \\ &\Longrightarrow g\ \ est\ surjective, \ (voir\ la\ proposition\ précédente) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\circ g = Id_F &\Longrightarrow g\circ f \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow g \text{ est injective, (voir la proposition précédente)} \end{aligned}$$

d'où g est bijective, alors $g^{-1} = f$.
Montrons que g est unique. S'il existe une autre application h vérifiant $h\circ f = Id_E$ et $f\circ h = Id_F$ alors :

$$\begin{aligned} h\circ f = Id_E &\Longrightarrow (h\circ f)\circ g = Id_E\circ g \\ &\Longrightarrow (f\circ g)\circ g = Id_E\circ g \\ &\Longrightarrow h = g \ (car f\circ g = Id_E) \end{aligned}$$

Exemple 1

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x+1. \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}. On a

$$f \text{ injective} \iff [\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2].$$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

d'où f est injective.

$$f \text{ surjective} \iff \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } = f(x).$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque, pour chercher $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie $y = f(x)$, on doit résoudre l'equation d'inconnue x, $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2x+1 = y \\ &\iff x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d'où

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}, \text{ tel que } y = f(x).$$

alors f est surjective , donc f est bijective. comme f est bijective alors f^{-1} existe et vérifie

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2x + 1 = y \\ &\iff x = \frac{y-1}{2} = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

et en conclusion

$$\begin{aligned} f^{-1} : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} f : \ & [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1] \\ & x \longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.

$$f \ \textit{injective} \iff [\forall x_1, x_2 \in [0,\ 1], f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2].$$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Longrightarrow |x_1| = |x_2| \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 (\textit{Car}\, x_1, x_2 \in [0,\ 1]). \end{aligned}$$

d'où f est injective.

$$f \ \textit{surjective} \iff \forall y \in [0,\ 1] \exists x \in [0,\ 1] \ \textit{tel que} \ \ y = f(x).$$

Soit $y \in [0,\ 1]$ quelconque, pour chercher $x \in [0,\ 1]$ qui vérifie $y = f(x)$, on doit résoudre l'equation d'inconnue x, $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 = y \\ &\iff x = \sqrt{y} \in [0,\ 1]. \end{aligned}$$

d'où

$$\forall y \in [0,\ 1], \exists x = \sqrt{y} \in [0,1],\ \textit{tel que}\ \ y = f(x).$$

alors f est surjective , donc f est bijective, comme f est bijective alors f^{-1} existe et vérifie

$$f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow x^2 = y \\ &\Longleftrightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

et en conclusion

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ [0,1] &\longrightarrow [0,\ 1] \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Remarque 3 *On peut montrer la bijecvité de f directement sans passer par l'injectivité et la surjectivité en utilisant cette définition*

$$\boxed{f\ \ \textit{bijective} \Longleftrightarrow \forall y \in [0,\ 1],\ \exists! x \in [0,\ 1],\ \textit{tel que}\ y = f(x).}$$

Proposition 2 *Soient E, F, G trois ensembles Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives alors $g \circ f$ est bijective et sa récirpoque*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration 1.1.1.2 *On a*

$$\begin{aligned} f,\ g\ \textit{sont bijectives} &\Longrightarrow (g \circ f)\ \textit{bijective} \\ &\Longrightarrow (g \circ f)\ \textit{inversible et}\ (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = Id_G. \end{aligned}$$

On compose deux côtés de l'égalité, f^{-1} et g^{-1}, comme suit :

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = Id_G &\Longrightarrow g^{-1} \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ Id_G \\ &\Longrightarrow (g^{-1} \circ g) \circ f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ Id_G\ (\textit{car} \circ \textit{ est associative}) \\ &\Longrightarrow Id_F \circ f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \\ &\Longrightarrow f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \\ &\Longrightarrow f^{-1} \circ (f \circ (g \circ f)^{-1}) = f^{-1} \circ g^{-1} \\ &\Longrightarrow (f^{-1} \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\ (\textit{car} \circ \textit{ est associative}) \\ &\Longrightarrow Id_E \circ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \\ &\Longrightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

Dóù

$$\boxed{\left(g\circ f\right)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.}$$

Chapitre 2

Relations binaires

En mathématiques, on cherche souvent à comparer deux éléments d'un ensemble ou la propriété que deux éléments d'un ensemble sont susceptibles d'avoir.

Définition 2.0.1 *Soient deux ensembles E et F, une relation de E dans F est toute assertion reliant un élément de E à un élément de F, pouvant être vraie ou fausse. On note la relation par* $\mathfrak{R}$

ou bien

Définition 2.0.2 *Soient deux ensembles E et F, une relation de E vers F est une correspondance $\mathfrak{R}$ qui lie des éléments de E à des éléments de F.*

ou alors

Définition 2.0.3 *Soient deux ensembles E et F, une relation $\mathfrak{R}$ de E vers F est une partie de $E \times F$, on note $x \mathfrak{R} y$ si $(x, y) \in \mathfrak{R}$.*

Remarque 4

- *L'ensemble E est appelé ensemble de départ de $\mathfrak{R}$,*
- *l'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de $\mathfrak{R}$.*
- *Pour tout élément x de E et tout élément y de F vérifiant $\mathfrak{R}$, on dit que $x \in E$ est en relation par R avec y, et on écrit $x \mathfrak{R} y$ sinon $x \not{\mathfrak{R}} y$.*
- *Si $E = F$, la relation $\mathfrak{R}$ est appelé relation binaire sur E.*

Nous étudions dans ce chapitre que les ***relations binaires sur un ensemble****.*

Exemple 5 *1. Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\mathfrak{R}_1$ comme suit :*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\,\mathfrak{R}_1\,y \iff y \text{ multiple de } x.}$$

Par exemple $1\,\mathfrak{R}_1\,x,\ \forall x \in \mathbb{Z},$
$x\,\mathfrak{R}_1\,0,\ \forall x \in \mathbb{Z},$
$6\,\mathfrak{R}_1\,12,\quad 4\,\cancel{\mathfrak{R}_1}\,10,\quad \ldots,$ *etc.*

---

2. Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\mathfrak{R}_2$ comme suit :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\,\mathfrak{R}_2\,y \iff x \equiv y[2]}.$$

Par exemple
$1\mathfrak{R}_2 1,\ 1\mathfrak{R}_2(-1),\ 2\,\cancel{\mathfrak{R}_2}\,3\ \ldots$ *etc.*

---

3. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathfrak{R}_3$ comme suit :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathfrak{R}_3\,y \iff x^2 = y^2}.$$

Par exemple
$1\mathfrak{R}_3 1,\ 1\ R_3(-1),\ 1\cancel{\mathfrak{R}_3}3,\ 2\mathfrak{R}_3(-2)\ \ldots$ *etc.*

---

4. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathfrak{R}_4$ comme suit :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathfrak{R}_4\,y \iff x = y}.$$

Par exemple
$1\mathfrak{R}_4 1,\ 1\cancel{\mathfrak{R}_4}(-1),\ \ldots$ *etc.*

---

5. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathfrak{R}_5$ comme suit

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathfrak{R}_5\,y \iff x \leq y}.$$

Par exemple
$1\mathfrak{R}_5 1,\ 1\cancel{\mathfrak{R}_5}(-1),\ \ldots$ *etc.*

---

6. *Dans* $\mathbb{R}$*, on définit la relation* $\mathfrak{R}_6$ *comme suit :*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathfrak{R}_6\, y \iff x < y}.$$

Par exemple
$5 \not\mathfrak{R}_6 5,\ 4\mathfrak{R}_6 5,\ \ldots$ *etc*

7. *Soit* $E = \{a, b, c\}$*, dans* $P(E)$*, on définit la relation* $\mathfrak{R}_7$ *comme suit :*

$$\boxed{\forall A, B \in P(E),\ A\,\mathfrak{R}_7\, B \iff A \cap B \neq \emptyset}.$$

Par exemple
$A\mathfrak{R}_7 B,\ \emptyset \not\mathfrak{R}_7 A,\ A \not\mathfrak{R}_7 H,\ \ldots$ *etc, avec* $A = \{a, b\},\ B = \{a\},\ H = \{c\}$.

---

8. *Soit E ensemble quelconque, dans* $P(E)$*, on définit la relation* $\mathfrak{R}_8$ *comme suit :*

$$\boxed{\forall A, B \in P(E),\ A\,\mathfrak{R}_8\, B \iff A \subset B}.$$

Par exemple
$A\mathfrak{R}_8 E,\ \emptyset\mathfrak{R}_8 A,\ \forall A \in P(E)$,

---

9. *Dans un plan* (P)*, on définit la relation* $\mathfrak{R}_9$ *sur l'ensemble des droites du plan* (P) *comme suit :*

$$\boxed{\forall (\Delta), (\Delta') \in P,\ (\Delta)\,\mathfrak{R}_9\,(\Delta') \iff (\Delta) \parallel (\Delta')}.$$

Par exemple
Soient trois droites : (Δ_1) *d'équation :* $y = x$, (Δ_2) *d'équation :* $y = x + 1$, (Δ_3) *d'équation :* $y = 2x$*, on a alors :* $(\Delta_1)\,\mathfrak{R}_9\,(\Delta_2)$, $(\Delta_1) \not\mathfrak{R}_9 (\Delta_3)$.

---

10. *Dans un plan* (P), *on définit la relation* $\mathfrak{R}_{10}$ *sur l'ensemble des droites du plan* (P) *comme suit :*

$$\boxed{\forall (\Delta),(\Delta^{'}) \in P,\ (\Delta)\,\mathfrak{R}_{10}\,(\Delta^{'}) \iff (\Delta) \perp (\Delta^{'})}.$$

Par exemple
Soient trois droites : (Δ_1) *d'équation :* $y = x$, (Δ_2) *d'équation :* $y = -x$, (Δ_3) *d'équation :* $y = 3x$, *on a alors :* $(\Delta_1)\mathfrak{R}_{10}(\Delta_2)$, $(\Delta_1)\cancel{\mathfrak{R}_{10}}(\Delta_3)$.

Définition 2.0.4 (Graphe d'une relation) *Soit* $\mathfrak{R}$ *définie une relation binaire sur un ensemble* E, *on appelle le graphe de la relation* $\mathfrak{R}$, *noté* $G_{\mathfrak{R}}$, *le sous ensemble de* $E \times E$ *défini par*

$$G_{\mathfrak{R}} = \left\{(x, y) \in E \times E,\ \text{tel que } x\,\mathfrak{R}\,y\right\}.$$

Exemple 6 *Soit* $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *et on définit la relation* $\mathfrak{R}$ *sur* E *par :*

$$\forall x, y \in E,\ x\,\mathfrak{R}\,y \iff x^2 = y^2.$$

donc le graphe de la relation $\mathfrak{R}$ *est définit comme suit :*

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1), (2,2), (-2,2), (2,-2), (-2,-2), (0,0), (3,3)\}.$$

2.1 Propriétés des relations binaires sur un ensemble

Soit E *un ensemble,* $\mathfrak{R}$ *une relation définie sur* E.

Définition 2.1.1 (Réflexivité) *La relation* $\mathfrak{R}$. *est dite réflexive si*

$$\boxed{\forall x \in E,\ x\,\mathfrak{R}\,x.}$$

Exemple 7 *les relations définies précèdemment* $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_8, \mathfrak{R}_9$ *sont toutes réflexives, par contre les relations* $\mathfrak{R}_6, \mathfrak{R}_7, \mathfrak{R}_{10}$ *ne le sont pas .*

Remarque 8 *Pour montrer qu'une relation $\mathfrak{R}$ n'est pas réfexive, il suffit de trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $x_0 \not\mathfrak{R} x_0$.*
Dans l'exemple précédent, la relation $\mathfrak{R}_7$ n'est pas réflexive car $\emptyset \not\mathfrak{R}_7 \emptyset$, $(\emptyset \cap \emptyset = \emptyset)$.

Définition 2.1.2 (Symétrie) *La relation $\mathfrak{R}$. est dite symétrique si*

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ x \mathfrak{R} y \Longrightarrow y \mathfrak{R} x.}$$

Exemple 9 *les relations définies précèdemment $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_7, \mathfrak{R}_9, \mathfrak{R}_{10}$ sont toutes symétriques, par contre les relations $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_6, \mathfrak{R}_8$ ne le sont pas .*

Remarque 10 *Pour montrer qu'une relation $\mathfrak{R}$ n'est pas symétrique, il suffit de trouver deux éléments $x_0, y_0 \in E$ tel que $x_0 \mathfrak{R} y_0$ et $y_0 \not\mathfrak{R} x_0$*
Dans l'exemple précédent, la relation $\mathfrak{R}_8$ n'est pas symétrique car $\emptyset \mathfrak{R}_8 E$, mais $E \not R_8 \emptyset$.

Définition 2.1.3 (Antisymétrie) *La relation $\mathfrak{R}$. est dite antisymétrique si*

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ x \mathfrak{R} y \text{ et } y \mathfrak{R} x \Longrightarrow x = y.}$$

Exemple 11 *les relations définies précèdemment $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_6, \mathfrak{R}_8$ sont toutes antisymétriques, par contre les relations $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_7, \mathfrak{R}_9, \mathfrak{R}_{10}$ ne le sont pas .*

Remarque 12 *Pour montrer qu'une relation $\mathfrak{R}$ n'est pas antisymétrique, il suffit de trouver deux éléments $x_0, y_0 \in E$ tel que $x_0 \mathfrak{R} y_0$ et $y_0 \mathfrak{R} x_0$, mais $x_0 \neq y_0$.*
Dans l'exemple précédent, la relation $\mathfrak{R}_3$ n'est pas antisymétrique car
$1 \mathfrak{R}_3 (-1)$, *et* $(-1) \mathfrak{R}_3 1$ *mais* $1 \neq (-1)$.

Définition 2.1.4 (Transitivité) *La relation $\mathfrak{R}$. est dite transitive si*

$$\boxed{\forall x, y, z \in E,\ x \mathfrak{R} y \text{ et } y \mathfrak{R} z \Longrightarrow x \mathfrak{R} z.}$$

Exemple 13 *les relations définies précèdemment $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_6, \mathfrak{R}_8, \mathfrak{R}_9$ sont toutes transitives, par contre les relations $\mathfrak{R}_7, \mathfrak{R}_{10}$ ne le sont pas.*

Remarque 14 *Pour montrer qu'une relation $\mathfrak{R}$ n'est pas transitive, il suffit de trouver trois éléments $x_0, y_0, z_0 \in E$ tel que $x_0 \mathfrak{R} y_0$ et $y_0 \mathfrak{R} z_0$, mais $x_0 \not\mathfrak{R} z_0$.*
Dans l'exemple précédent, la relation $\mathfrak{R}_{10}$ n'est pas transitive car
si la droite (Δ_1) est perpendiculaire à la droite (Δ_2) et la droite (Δ_2) est perpendiculaire à la droite (Δ_3) alors la droite (Δ_1) n'est pas perpendiculaire à la droite (Δ_3), (mais $(\Delta_1) \parallel (\Delta_3)$).

2.2 Relations d'équivalence

2.2.1 Définitions et exemples

Définition 2.2.1 *Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathfrak{R}$ est* ***une relation d'équivalence*** *si $\mathfrak{R}$ est* ***réflexive****,* ***symétrique*** *et* ***transitive****.*

Exemple 15 *On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :*

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ x\,\mathfrak{R}\,y \iff xy > 0.$$

Montrons que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

- *Montrons que $\mathfrak{R}$ est réflexive. On a*

$$\boxed{R \text{ est réflexive} \iff [\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\,\mathfrak{R}\,x.]}$$

Il est facile de voir que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$, ce qui est équivalent à dire que $x\,\mathfrak{R}\,x$. dóù $\mathfrak{R}$ est réflexive.

- *Montrons que $\mathfrak{R}$ est symétrique. On a par définition*

$$\boxed{R \text{ est symétrique} \iff [\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ x\,\mathfrak{R}\,y \Longrightarrow y\,\mathfrak{R}\,x\,]}$$

on a

$$\begin{aligned}\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ x\,\mathfrak{R}\,y &\Longrightarrow xy > 0\\ &\Longrightarrow yx > 0\\ &\Longrightarrow y\,\mathfrak{R}\,x\,.\end{aligned}$$

d'où $\mathfrak{R}$ est symétrique.

- *Montrons que $\mathfrak{R}$ est transitive. On a par définition*

$$\boxed{R \text{ est transitive} \iff [\forall x,\ y, z\ \in \mathbb{R}^*,\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,\mathfrak{R}\,z \Longrightarrow x\,\mathfrak{R}\,z\,]}$$

on a

$$\begin{aligned}\forall x,\ y,\ z\ \in \mathbb{R}^*,\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,\mathfrak{R}\,z, &\Longrightarrow xy > 0,\ \text{et } yz > 0\\ &\Longrightarrow xz > 0\end{aligned}$$

$$(x \text{ a le même signe que } y \text{ et } y \text{ est de même signe que } z \text{ alors forcément } z \text{ est de même signe que } x)$$

$$\Longrightarrow x\,\mathfrak{R}\,z\,.$$

d'où $\mathfrak{R}$ est transitive.

On déduit que $\mathfrak{R}$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^*$.

Exemple 16 *Les relations* $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_9$ *sont toutes des relations d'équivalence, par contre les relations*
$\mathfrak{R}_1$ *(n'est pas syémtrique)* , $\mathfrak{R}_6$ *(n'est pas réflexive)* , $\mathfrak{R}_7$ *(n'est pas réflexive)* ,
$\mathfrak{R}_8$ *(n'est pas réflexive)* , $\mathfrak{R}_{10}$ *(n'est ni réflexive ni transitive), ne le sont pas* .

Exercice 17 ⚠ ✍ *La relation suivante est -elle une. relation d'qúivalence sur* $\mathbb{R}$ *? :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} y \iff xy \leqslant 0.$$

On peut donc regrouper ces éléments par " paquets " d'éléments qui se ressemblent, définissant ainsi la notion de classe d'équivalence, pour enfin construire de nouveaux ensembles en " assimilant " les éléments similaires à un seul et même élément. On aboutit alors à la notion d' ensemble quotient .

2.2.2 Ensemble quotient

Définition 2.2.2 *Soit* $\mathfrak{R}$ *une relation d'équivalence dans un ensemble* E *. Pour chaque* x *de* E, *l'ensemble de tous les éléments de* E *qui sont en relation , par* $\mathfrak{R}$, *avec* x *est appellé classe d'équivalence de* x *notée* $\dot{x}$, *ou* $\bar{x}$, *ou* $cl(x)$,*ou* C_x.
Donc, la classe d'équivalence $\dot{x}$ *est le sous ensemble de* E *défini par*

$$\dot{x} = \bar{x} = \{y \in E \text{ tel que } y \mathfrak{R} x\}$$

Si $y \in \dot{x}$, y *est dit un représentant de la classe* $\dot{x}$. *L'ensemble des classes d'équivalence est appelé ensemble quotient de* E *par la relation* $\mathfrak{R}$ *, noté* $E/\mathfrak{R}$.

$$E/\mathfrak{R} = \bar{x} = \{\dot{x} \mid x \in E\}$$

Exemple 18 *Dans* $\mathbb{Z}$, *on définit la relation* $\mathfrak{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ x \mathfrak{R} y \iff x - y = 5k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$\mathfrak{R}$ *est une relation d'équivalence. la classe de* 0.

$$\begin{aligned}\dot{0} &= \{x \in \mathbb{Z},\ \textit{tel que}\ \ x\mathfrak{R}\,0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z},\ \textit{tel que}\ x - 0 = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{5k,\ k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

de la même façon on détermine les autres classes, il y a exactement cinq classes dé-quivalence.

$$\dot{0} = \{5k,\ k \in \mathbb{Z}\}, \dot{1} = \{5k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}, \dot{2} = \{5k+2,\ k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\dot{3} = \{5k+3,\ k \in \mathbb{Z}\}, \dot{4} = \{5k+4,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour cette relation, on note $x \equiv y[5]$, *on le lit* x ***congruo à*** y ***modulo*** 5. *L'ensemble quotient est noté* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *au lieu de* $\mathbb{Z}/\mathfrak{R}$ *et on a alors :*

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}.$$

Proposition 3 *Soit* $\mathfrak{R}$ *une relation définie sur un ensemble* E, *on a les propriétés suivantes :*

❶ *Soient* $a,\ x \in E$, *si* $a \in \dot{x}$ *alors* $\dot{a} = \dot{x}$.

❷ $\forall x,\ y \in E$, $\dot{x} = \dot{y} \iff x\,\mathfrak{R}\,y$.

❸ *Soient* $u, v, x \in E$, *si* $u, v \in \dot{x}$ *alors* $u\mathfrak{R}\,v$.

❹ $\forall x, y \in E$, *on a* $\dot{x} = \dot{y}$ *ou* $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$.

❺ *Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble* E.

$$E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}.$$

Démonstration 2.2.2.1 ✔ *Si* $y \in \dot{x}$, *alors*

$$y\,\mathfrak{R}\,x \text{ et on a } x\mathfrak{R}\,a,$$

on déduit, par la transitivité, que

$$y\,\mathfrak{R}\,a,$$

ce qui implique que

$$y \in \dot{a}.$$

même raisonnement pour montrer que $\dot{a} \subset \dot{x}$.
Conclusion

$$\dot{x} = \dot{a}.$$

✔ *Montrons l'implication directe, on suppose que* $\dot{x} = \dot{y}$ *et montrons que* $x\mathfrak{R}y$. *il est facile de voir que* $x \in \dot{x}$ *(car* $\mathfrak{R}$ *est réflexive).*

$$\begin{aligned} x \in \dot{x} &\Longrightarrow x \in \dot{y} \\ &\Longrightarrow x\mathfrak{R}\,y. \end{aligned}$$

Réciproquement si $x\mathfrak{R}\,y$ *alors* $\dot{x} = \dot{y}$. *en effet, soit* $z \in \dot{x}$

$$\begin{aligned} z \in \dot{x} &\Longrightarrow z\,\mathfrak{R}x, \\ &\Longrightarrow z\ R\ y\ (\textit{car } x\,\mathfrak{R}\ y \textit{ et } \mathfrak{R} \textit{ est transitive.}) \\ &\Longrightarrow z \in \dot{y}. \end{aligned}$$

D'où $\dot{x} \subset \dot{y}$ *De même , on montre que* $\dot{y} \subset \dot{x}$
Soit $z \in \dot{y}$

$$\begin{aligned} z \in \dot{y} &\Longrightarrow z\,\mathfrak{R}\,y, \\ &\Longrightarrow z\ R\ x\ (\textit{car } y\,\mathfrak{R}\ x\ (\mathfrak{R} \textit{ est symétrique et transitive.}) \\ &\Longrightarrow z \in \dot{x}. \end{aligned}$$

D'où $\dot{y} \subset \dot{x}$.

✔ *On a* $u, v \in \dot{x}$ *alors* $u\mathfrak{R}x$ *et* $x\mathfrak{R}v$ *d'où* $u\mathfrak{R}v$ *(par la transitivité de* $\mathfrak{R}$.*)*

✔ *Soient* $x, y \in E$ *tels que* $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$, *montrons que* $\dot{x} = \dot{y}$.
On a $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$ *alors* $\exists z \in E$, *tel que* $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$

$$\begin{aligned} z \in \dot{x} \cap \dot{y} &\Longrightarrow z \in \dot{x} \textit{ et } z \in \dot{y} \\ &\Longrightarrow z\,\mathfrak{R}\,x \textit{ et } z\,\mathfrak{R}\ y, \\ &\Longrightarrow \dot{z} = \dot{x} \textit{ et } \dot{z} = \dot{y},\ (\textit{ voir la première propriété}) \\ &\Longrightarrow \dot{x} = \dot{y}. \end{aligned}$$

✔ *Montrons que l'ensemble quotient forme une partition de E*

❶ *On a* $\forall \dot{x} \in E/\mathfrak{R},\ \dot{x} \neq \emptyset$*, car* $x \in \dot{x}$*. (la relation* $\mathfrak{R}$ *est réflexive,* $x\mathfrak{R}x$*).*

❷ *On a montré précèdemment que toutes les classes distinctes sont disjointes.*

❸ *Reste à montrer que*

$$E = \bigcup_{x \in E} \dot{x},$$

on a une inclusion évidente

$$\bigcup_{y \in E} \dot{y} \subset E,$$

montrons l'autre inclusion.

$$E \subset \bigcup_{y \in E} \dot{y}.$$

Soit $x \in E$ *alors* $x \in \dot{x}$ *et donc* $x \in \bigcup_{y \in E} \dot{y}$ *d'où*

$$E \subset \bigcup_{y \in E} \dot{y}$$

en conclusion, l'ensemble $E/\mathfrak{R}$ *est une partition de* E*.*

2.2.3 Décomposition canonique d'une application

La décomposition canonique d'une application :

Définition 2.2.3 *Soient* E *et* F *deux ensembles,* $f : E \longrightarrow F$ *une application, et soit* $\mathfrak{R}$ *une relation définie sur* E *par :*

$$x\,\mathfrak{R}\,y \iff f(x) = f(y).$$

Cette relation $\mathfrak{R}$ *est une relation d'équivalence, elle dite relation d'équivalence associée à* f*. Soient* $f(E) = \{f(x) |\ x \in E\}$ *est l'ensemble image de* E *par* f*,* i *l'**injection canonique** de* $F(E)$ *dans* F *et* π ***la surjection canonique** de* E *dans* $E/\mathfrak{R}$*.*

$$\begin{aligned} i : f(E) &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow E/\mathfrak{R} \\ x &\longmapsto \dot{x} \end{aligned}$$

Remarque 19 *On vérifie facilement, par construction, que l'application* i *est injective et l'application* π *est surjective.*

Théorème 20 *Soit E, F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application*

❶ *La relation binaire $\mathfrak{R}$ définie sur E par :*

$$x\mathfrak{R}y \iff f(x) = f(y).$$

est une relation d'équivalence sur E dite associée à f.

❷ . *Soient π la surjection canonique de E sur $E/\mathfrak{R}$ et i l'injection canonique de $f E)$ dans F. Alors il existe une application bijective unique*

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : E/\mathfrak{R} &\longrightarrow f(E) \\ \dot{x} &\longmapsto \widetilde{f}(\dot{x}) = f(x). \end{aligned}$$

telle que $f = i \circ \widetilde{f} \circ \pi$.

Démonstration 2.2.3.1 ❶ *Il est facile de vérifier que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur E.*

❷ *En effet,*

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{y} &\iff f(x) = f(y) \\ &\iff \widetilde{f}(\dot{x}) = \widetilde{f}(\dot{y})). \end{aligned}$$

On vient de montrer aussi que $\widetilde{f}$ est injective.
$\widetilde{f}$ est surjective par construction. Ainsi, $\widetilde{f}$ est une bijection de $E/\mathfrak{R}$ dans $f(E)$, $\widetilde{f}$ est appelée la bijection canonique associé à f.
S'il existait une autre application $g : E/\mathfrak{R} \longrightarrow F$ telle que $f = g \circ \pi$, on aurait pour tout $x \in E$, $\widetilde{f}(\dot{x}) = f(x) = g(\dot{x})$. d'où $\widetilde{f} = g$, ce qui prouve l'unicité de $\widetilde{f}$.
il est clair que pour tout $x \in E$, on a alors :

$$\boxed{\forall x \in E, f(x) = i(f(x)) = i(\widetilde{f}(\dot{x})) = (i \circ \widetilde{f} \circ \pi)(x).}$$

*D'où $f = i \circ \widetilde{f} \circ \pi$: C'est la décomposition canonique de f en la composée d'**une injection**, **une bijection** et **une surjection**. On vient d'établir le théorème de la* *décomposition canonique d'une application, on a le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ E/\mathfrak{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] & f(E) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Exercice 21 *Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie sur R par :*

$$\forall; x, y \in \mathbb{R},\ x\mathfrak{R}\, y \iff x^2 = y^2$$

❶ *Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:*

❷ *Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$;*

❸ *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathfrak{R}$.*

❹ *L'application f définie par :*

$$f : \mathbb{R}/\mathfrak{R} \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$\dot{x} \longmapsto f(\dot{x}) = x^2.$$

est-elle bien définie ? est-elle bijective ?

2.3 Relations d'ordre

2.3.1 Définitions et exemples

Définition 2.3.1 *Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathfrak{R}$ est **une relation d'ordre** si $\mathfrak{R}$ est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.*

Exemple 22 *On définit dans $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\,\mathfrak{R}\, y \iff x \text{ divise } y.$$

Montrons que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

✔ *Montrons que* $\mathfrak{R}$ *est réflexive. On a*

$$\boxed{R \text{ est réflexive } \Longleftrightarrow [\forall x \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,x]}$$

Il est facile de voir que $\forall x \in \mathbb{N},\ x = 1.x,$ *ce qui est équivalent à dire que* $x\,\mathfrak{R}\,x$ *d'où* $\mathfrak{R}$ *est réflexive.*

✔ *Montrons que* $\mathfrak{R}$ *est antisymétrique. On a par définition*

$$\boxed{R \text{ est antisymétrique } \Longleftrightarrow [\forall x,\ y \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,\mathfrak{R}\,x \Longrightarrow y = x\,]}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall x,\ y \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,R\,x &\Longrightarrow x \text{ divise } y \text{ et } y \text{ divise } x \\
&\Longrightarrow \exists k,\ k^{'} \in \mathbb{N},\ y = k.x \text{ et } x = k^{'}.y \\
&\Longrightarrow \exists k,\ k^{'} \in \mathbb{N},\ y = k.x \quad \text{et} \quad x = k^{'}.k.x\,. \\
&\Longrightarrow \exists k,\ k^{'} \in \mathbb{N},\ y = k.x \text{ et } k^{'}.k = 1\,. \\
&\Longrightarrow \exists k,\ k^{'} \in \mathbb{N},\ y = k.x \text{ et } k^{'} = k = 1\,. \\
&\Longrightarrow y = x,\,.
\end{aligned}$$

d'où $\mathfrak{R}$ *est antisymétrique.*

✔ *Montrons que* $\mathfrak{R}$ *est transitive. On a par définition*

$$\boxed{R \text{ est transitive } \Longleftrightarrow [\forall x,\ y, z \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,\mathfrak{R}\,z \Longrightarrow x\,\mathfrak{R}\,z\,]}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,\mathfrak{R}\,z, &\Longrightarrow \exists k,\ k^{'} \in \mathbb{N},\ y = k.x \text{ et } z = k^{'}.y \\
&\Longrightarrow \exists k,\ k^{'} \in \mathbb{N},\ z = k^{'}.k.x \\
&\Longrightarrow \exists k^{''} \in \mathbb{N},\ z = k^{''}x \\
&\Longrightarrow x\,\mathfrak{R}\,z\,.
\end{aligned}$$

d'où $\mathfrak{R}$ *est transitive.*

On déduit que $\Re$ *est une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}$.

Exercice 23 ⚠ ✍ *La relation suivante est -elle une. relation d'ordre sur* $\mathbb{Z}$ *? :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \Re y \iff x \text{ divise } y.$$

Exemple 24 *Les relations* $\Re_2, \Re_4, \Re_5, \Re_8$ *sont toutes des relations d'ordre, par contre les relations*
$\Re_1$ *(n'est pas antisyémtrique) ,* $\Re_3$ *(n'est pas antisymétrique) ,* $\Re_6$ *(n'est pas réflexive) ,* $\Re_7$ *(n'est pas réflexive) ,* $\Re_9$*, (n'est pas antisymétrique)* $\Re_{10}$ *(n'est ni réflexive ni transitive), ne le sont pas .*

Remarque 25 *Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit un ensemble ordonné, et on le note* $(E, \Re)$.

2.3.2 Ordre total ou partiel

Définition 2.3.2 *Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre* $\Re$.

❶ *Soient* x, y *deux éléments de* E*, on dit que* x *et* y *sont* ***comparables*** *si* $x \Re y$ *ou* $y \Re x$.

❷ *On dit que la relation* $\Re$ *est d'****ordre total****, ou bien* $(E, \Re)$ *est totalement ordonné, si deux éléments quelconques* x, y *de E sont comparables. Autrement dit :*

$$\boxed{\text{La relation } R \text{ est d'ordre total} \iff \forall\, x, y \in E,\ x \Re y \text{ ou } y \Re x.}$$

Dans le cas contraire , on dit que la relation $\Re$ *est d'****ordre partiel****, ou bien* $(E, \Re)$ *est partiellement ordonné. Autrement dit :*

$$\boxed{\text{La relation } R \text{ est d'ordre partiel} \iff \exists\, x, y \in E,\ x \not\Re y \text{ et } y \not\Re x.}$$

Exemple 26 ❶ $\leqslant$ *et* $\geqslant$ *définissent un ordre total sur* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

❷ *La division définit un* ***ordre partiel*** *sur* $\mathbb{N}$.

❸ $\subset$ *et, ,* $\supset$ *définissent un ordre partiel sur* $\mathscr{P}(E)$ *dès que* $card(E) \geqslant 2$.

2.3.3 Éléments remarquables d'un ensemble ordonné

Majorant, minorant d'un ensemble

Définition 2.3.3 *Soient $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E et A une partie non vide de E.*

❶ *On dit que A est **majorée** pour la relation $\mathfrak{R}$ si :*

$$\boxed{\exists M \in E,\ \forall x \in A,\ \text{ tel que } x\,\mathfrak{R}\,M}.$$

*On dit que M est un **majorant** de A ou bien A est **majorée** par M.*

❷ *On dit que A est **minorée** pour la relation $\mathfrak{R}$ si :*

$$\boxed{\exists m \in E,\ \forall x \in A,\ \text{ tel que } m\,\mathfrak{R}\,x}.$$

*On dit que m est **un minorant** de A ou bien A est **minoré** par m :*

Exemple 27 ❶ *$A = \{1, 3, 7\}$ est minorée par 1 et majorée par 21 pour la relation de définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,y \iff y \text{ multiple de } x.}$$

En effet :

✔ *Soit $M \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} M \text{ est un majorant de } A &\Longrightarrow \forall x \in A, x\,\mathfrak{R}\,M. \\ &\Longrightarrow M \text{ multiple de } 1,\ M \text{ multiple de } 3 \text{ et } M \text{ multiple de } 7 \\ &\Longrightarrow M \text{ est le multiplie commun de } 1, 3 \text{ et } 7. \\ &\Longrightarrow M \text{ est multiple de } 21. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des majorants de A est $\{21k,\ \text{tel que } k \in \mathbb{N}\}$.

✔ *Soit $m \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} m \text{ est un minorant de } A &\Longrightarrow \forall x \in A, m\,\mathfrak{R}\,x. \\ &\Longrightarrow 1 \text{ multiple de } m,\ 3 \text{ multiple de } m \text{ et } 7 \text{ multiple de } m \\ &\Longrightarrow m \text{ est le diviseur commun de } 1, 3 \text{ et } 7. \\ &\Longrightarrow m = 1. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des minorants de A est $\{1\}$.

❷ *Dans l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$, $\mathscr{P}(E)$ est minoré par $\emptyset$ et majoré par E.*

Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble

Définition 2.3.4 *Soient $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E et A une partie non vide de E.*

❶ *Si A est majorée pour la relation $\mathfrak{R}$ alors le plus petit des majorants de A, s'il existe, est appelé* ***la borne supérieure****, notée* $\sup A$.

❷ *Si A est minorée pour la relation $\mathfrak{R}$ alors le plus grand des minorants de A, s'il existe, est appelé* ***la borne inférieure****, notée* $\inf A$.

Exemple 28 ❶ *$A = \{1, 3, 7\}$ est minorée par 1 et majorée par 21 pour la relation de définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\,\mathfrak{R}\,y \iff y \text{ multiple de } x.}$$

✔ *On a vu que l'ensemble des majorants de A est $\{21k, \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$, et donc $sup(A) = 21$ est le plus petit des majorants de A.*

✔ *pour la borne inférieure, on a déjà montré que l'ensemble des minorants de A est $\{1\}$., donc $Inf(A) = 1$.*

❷ *Une partie A d'un ensemble ordonné E n'admet pas nécessairement une borne supérieure (resp. inférieure). Toutefois, si A admet une borne supérieure (resp. inférieure), elle est unique mais elle peut ne pas appartenir à A.*
Par exemple, si $E = \mathbb{Q}$, ordonné par l'inégalité habituelle, et si

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \text{ et } x^2 < 2\right\},$$

alors l'ensemble A est minorée par n'importe quel nombre rationnel négatif ou nul. On a $inf(A) = 0$ mais A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Plus grand élément, plus petit élément d'un ensemble

Définition 2.3.5 *Soient $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E et A une partie non vide de E.*

❶ *On appelle* ***plus grand élément*** *de* A *(ou* ***maximum*** *de* A*),* *tout élément de A* *qui est majorant de* A*, on le note* $max(A)$*. Autrement dit :*

$$\boxed{M = max(A) \iff M \text{ est le plus grand élément de} A \iff [(M \in A) \text{ et } (\forall x \in A, x \Re M)]}$$

S'il en existe un, cet élément est unique.

❷ *On appelle* ***plus petit élément*** *de* A *(ou* ***minimum*** *de* A*),* *tout élément de A* *qui est minorant de* A*, on le note* $min(A)$*. Autrement dit*

$$\boxed{m = min(A) \iff m \text{ est le plus petit élément de} A \iff [(m \in A) \text{ et } (\forall x \in A, m \Re x)]}$$

S'il en existe un, cet élément est unique

Exemple 29 ❶ *. Avec la relation usuelle* $\leqslant$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *soit* A, B *deux parties de* $\mathbb{R}$.

$$A = \{2, 5, -7\}, \quad B =]0, 1[.$$

✔ *L'ensemble* A *possède un plus petit élément qui est* -7, *et un plus grand élément qui est* 5, $min(A) = -7$, $max(A) = 5$.

✔ *L'ensemble* B *ne possède ni un plus petit élément ni un plus grand èlèment.*

❷ *Pour la relation* $\Re$ *sur* $\mathbb{N}$ *:*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{N}, \ x \Re y \iff y \text{ multiple de } x.}$$

Soit le sous ensemble $A = \{2, 3, 10\}$ *de* $\mathbb{N}$.

✔ A *ne possède pas un plus grand élément , les majorants sont les multiples de* 30 *et le plus petit des majorants de* A *est* 30*, qui n'appartient pas à* A.

✔ A *ne possède pas un plus petit élément , les minorants de* A *sont les diviseurs communs de* $2, 3$ *et de* 10 *donc le seul minorant de* A *est* 1*, qui n'appartient pas à* A.

Élément maximal et élément minimal d'un ensemble

Définition 2.3.6 *Soit* E *un ensemble muni d'une relation d'ordre* $\Re$ *et* A *une partie non vide de* E.

❶ *On dit que* $a \in A$ *est un élément maximal de* A *si*

$$\forall x \in A,\ a \mathfrak{R} x \Longrightarrow x = a$$

C'est à dire, il n'existe pas d'élément x *dans* A*, autre que* a*, tel que* a *est en relation avec* x*. (ou bien, il n' y a pas d'élément dans l'ensemble* A *plus grand que* a*, par rapport à la relation* $\mathfrak{R}$*).*

❷ *On dit que* $b \in A$ *est un élément minimal de* A *si*

$$\forall x \in A, : x \mathfrak{R}\, b \Longrightarrow x = b.$$

C'est à dire, il n'existe pas d'élèment x *dans* A*, autre que* b*, tel que* x *est en relation avec* b*. (ou bien, il n' y a pas d'élèment dans l'ensemble* A *plus petit que* b*, par rapport à la relation* $\mathfrak{R}$*).*

❸ *On dit qu'un élément de* E *est extremal s'il est ou maximal ou minimal.*

Chapitre 3

Structures algébriques

3.1 Loi de composition interne

3.2 Groupes

3.3 Anneaux

3.4 Corps