Maths 04

Université A.MIRA de Béjaia ® 2011–2012
Faculté de Technologie
Département de Technologie-2$^{\text{ième}}$ Année

Examen Final de Probabilités et Statistiques

Exercice 1 (06.00 points) : Soit la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 30, \\ 0.08, & \text{si } 30 \leq x < 38, \\ 0.12, & \text{si } 38 \leq x < 42, \\ 0.24, & \text{si } 42 \leq x < 50, \\ 0.40, & \text{si } 50 \leq x < 60, \\ 0.52, & \text{si } 60 \leq x < 64, \\ 0.80, & \text{si } 64 \leq x < 70, \\ 0.88, & \text{si } 70 \leq x < 74, \\ 1, & \text{si } x \geq 74. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature du caractère étudié ?
2. Tracer le graphe de $F(x)$.
3. Déduire graphiquement les valeurs des quartiles.
4. Tracer le polygône des fréquences et déterminer le mode.
5. Calculer la moyenne et l'écart-type.

Exercice 2 : On considère la répartition d'une population de 100 employés d'une entreprise suivant deux caractères X (représente le nombre de maisons) et Y (représente le salaire mensuel en M.D.A.).

X/Y	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	Total
1	.	.	.	60
2	.	.	.	.
Total	.	30	35	.

Supposons que les deux variables X et Y sont indépendantes.

1. Compléter le tableau de contingence.
2. Déterminer les deux distributions marginales.
3. Déterminer la distribution de $Y/X = x_1$ et calculer sa variance.
4. Donner le coefficient de corrélation linéaire. Justifier.

Exercice 3 (07.00 points) : Un pharmacien observe, durant les six (6) premiers mois de l'ouverture de sa pharmacie, le chiffre d'affaire en millions de DA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où la variable X désigne le numéro du mois et la variable Y désigne le chiffre d'affaire correspondant.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	12	13	15	19	21	22

1. Tracer le nuage de points. Que remarquez-vous ?
2. Déterminer le centre de gravité du nuage de points.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en fonction de X et la représenter sur le même graphe.
4. Calculer le coefficient de corrélation. Conclure.
5. Déterminer l'équation de la droite de Mayer.
6. Donner une approximation du chiffre d'affaire à la fin du 7$^{\text{ème}}$ mois.

Bon Courage

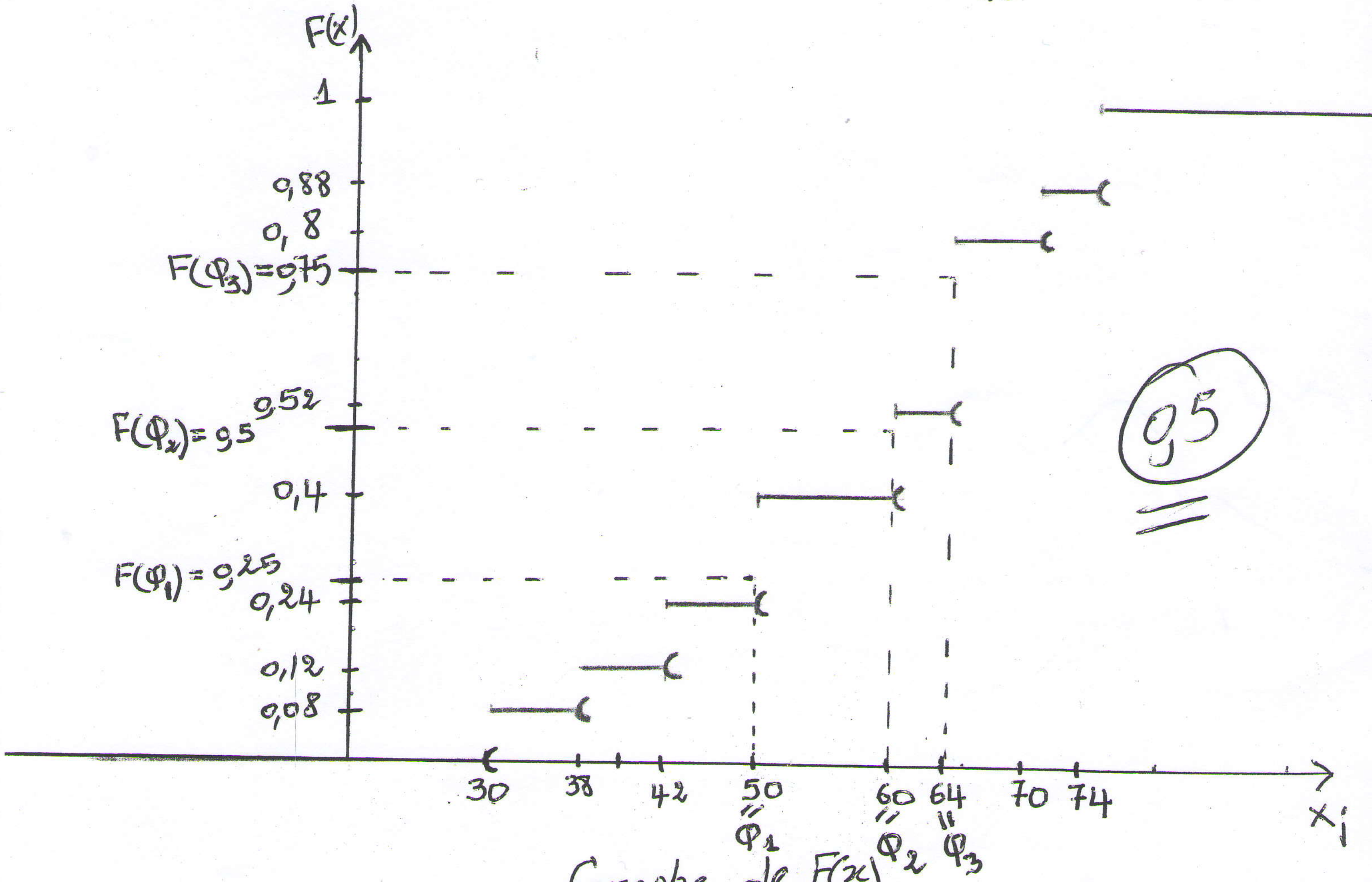
Corrigé de L'Examen Maths 04
2011 – 2012

Exo 1 (06,00 pts):

0,5

1. La nature du caractère est quantitatif Discret

2. le graphe de $F(x)$: 0,1 ↑ → 10



Graphe de $F(x)$

3. les valeurs de φ_1, φ_2 et φ_3

D'après le graphe de $F(x)$, on peut constater

$\varphi_1 = 50$ (car $F(\varphi_1) = 0,25$), 0,5

$\varphi_2 = Me = 60$ (car $F(\varphi_2) = 0,5$), 0,5

$\varphi_3 = 64$ (car $F(\varphi_3) = 0,75$). 0,5

le: 09/02/2012

4. Polygône des fréquences

0,5 0,5 0,5

x_i	f_i	$F_i \uparrow$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
30	0,08	0,08	2,40	72,00
38	0,04	0,12	1,52	57,76
42	0,12	0,24	5,04	211,68
50	0,16	0,40	8,00	400,00
60	0,12	0,52	7,20	432,00
64	0,28	0,80	17,92	1146,88
70	0,08	0,88	5,60	392,00
74	0,12	1	8,88	657,12
Total	1	//	$\overline{x} = 56,56$	3369,44

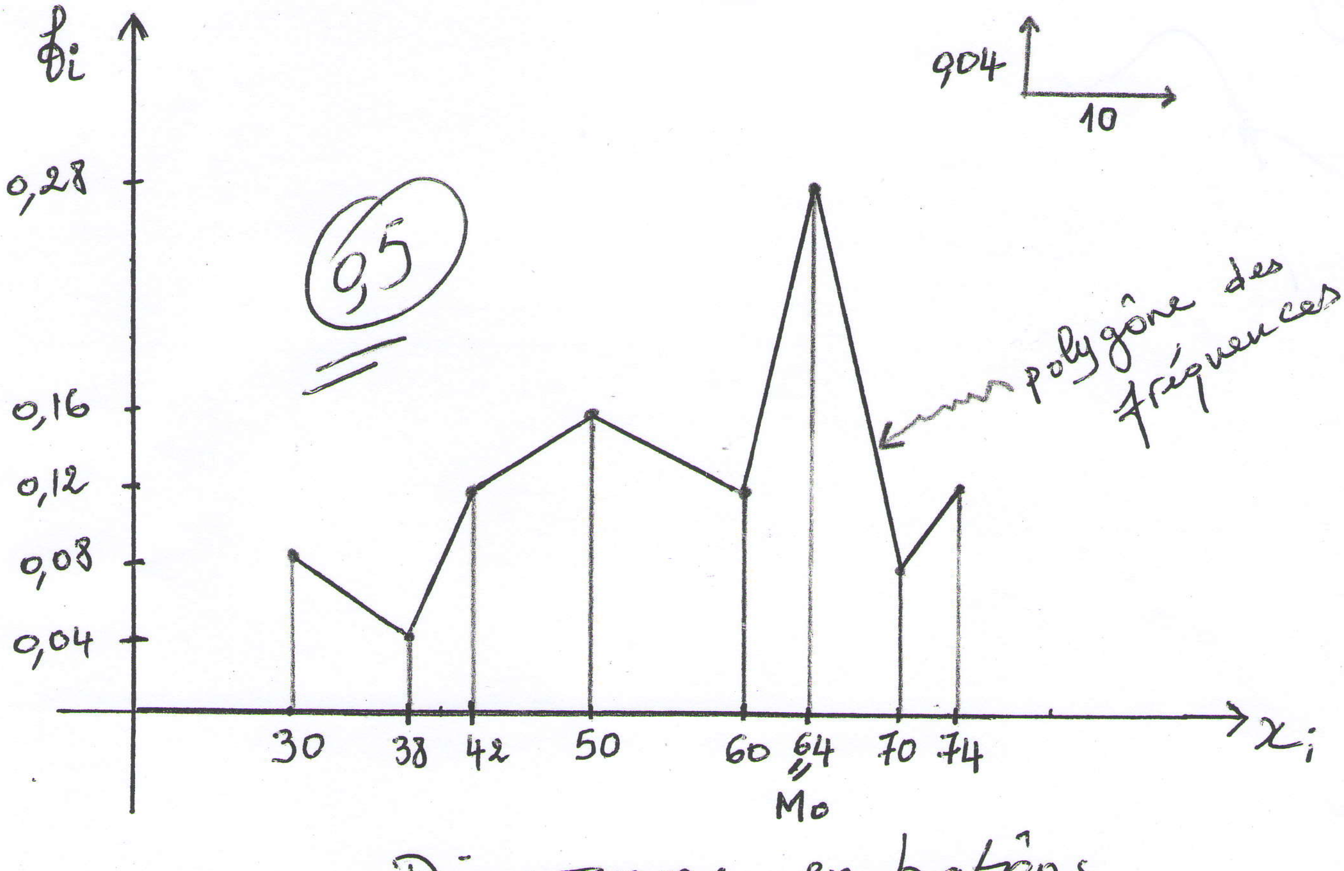


Diagramme en batôns

4.b le Mode

$Mo = x_6 = 64$ 0,5

5. La Moyenne

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{8} f_i x_i = 56,56$ (Voir le tableau) 0,5

* La Variance

$V(X) = \sum_{i=1}^{8} f_i x_i^2 - \overline{X}^2$

$= (3369,44) - (56,48)^2 = 170,45.$

L'écart-type

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} =$ [illegible] 0,5

EXO N° 2 (07,00 pts)

1. X et Y sont indépendantes $\iff n_{ij} = \dfrac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{n}$, 0,5

$\forall i = 1,2 ; \forall j = 1,2,3$

comme La taille de l'echantillon $n = 100$,

alors : $n_{2\cdot} = 100 - 60 = 40$

$n_{\cdot 1} = 100 - (30+35) = 35.$

et

$$n_{11} = \frac{n_{1\cdot}\, n_{\cdot 1}}{n} = \frac{60 \times 35}{100} = 21$$

$$n_{12} = \frac{n_{1\cdot}\, n_{\cdot 2}}{n} = \frac{60 \times 30}{100} = 18$$

$$n_{13} = \frac{n_{1\cdot}\, n_{\cdot 3}}{n} = \frac{60 \times 35}{100} = 21$$

02

$$n_{21} = \frac{n_{2\cdot}\, n_{\cdot 1}}{n} = \frac{40 \times 35}{100} = 14$$

$$n_{22} = \frac{n_{2\cdot}\, n_{\cdot 2}}{n} = \frac{40 \times 30}{100} = 12$$

$$n_{23} = \frac{n_{2\cdot}\, n_{\cdot 3}}{n} = \frac{40 \times 35}{100} = 14$$

Donc le tableau de Contingence est :

X\Y	[0,10[	[10,20[	[20,30[	$n_{i\cdot}$	
1	21	18	21	60	$= n_{1\cdot}$
2	14	12	14	40	$= n_{2\cdot}$
$n_{\cdot j}$	35	30	35	100	$= n$
	$\parallel$ $n_{\cdot 1}$	$\parallel$ $n_{\cdot 2}$	$\parallel$ $n_{\cdot 3}$		

2. les Deux Distributions marginales

* Selon X

x_i	$n_{i.}$	$f_{i.}$
1	60	0,6
2	40	0,4
Total	100	1

0,5

* Selon Y

classes	y_j	$n_{.j}$	$f_{.j}$
[0,10[	5	35	0,35
[10,20[	15	30	0,30
[20,30[	25	35	0,35
	Total	100	1

0,5

3. Distribution Conditionnelle de $Y/X = x_1 = 1$

0,5 0,25 0,25

classes	y_j	n_{1j}	$f_{j/1}$	$n_{1j}\,y_j$	$n_{1j}\,y_j^2$
[0,10[	5	21	0,35	105	525
[10,20[	15	18	0,30	270	4050
[20,30[	25	21	0,35	525	13125
Total	//	60 $= n_{1.}$	1	900	17700

La Variance conditionnelle

$$V_1(Y) = \frac{1}{n_{1.}} \sum_{j=1}^{3} n_{1j}\, y_j^2 - \bar{Y}_1^2$$

La moyenne Conditionnelle

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{n_{1.}} \sum_{j=1}^{3} n_{1j}\, y_j = \frac{1}{60}(900) = 15. \quad 0,5$$

D'où:

$$V_1(Y) = \frac{1}{60}(17700) - (15)^2 = 70. \quad 0,5$$

4. la Coefficient de Corrélation ρ_{xy} :

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

* <u>Première Méthode</u> (plus logique) :

* Comme les deux (02) variables sont indépendantes alors $\mathrm{cov}(x, y) = 0$ ce qui donne logiquement

1,5

$$\rho_{xy} = 0.$$

* <u>Deuxième Méthode</u> (par Calcul)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2} n_{i\cdot} x_i = \frac{1}{100}(140) = 1{,}4$$

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2} n_{i\cdot} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{100}(220) - (1{,}4)^2 = 0{,}24$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{3} n_{\cdot j} \, y_j = \frac{1}{100}(1500) = 15.$$

$$V(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{3} n_{\cdot j} \, y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{1}{100}(29500) - (15)^2 = 70$$

Avec $\sigma_x = \sqrt{0{,}24} =$

$\sigma_y = \sqrt{70} =$

et $\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{100}\left(\sum_i \sum_j n_{ij} \, x_i \, y_j\right) - \bar{X}\bar{Y}$

$= \frac{1}{100}(2100) - 21 = 0 \quad (X \perp\!\!\!\perp Y)$

$\Rightarrow \rho_{xy} = 0$, La Liaison est nulle.

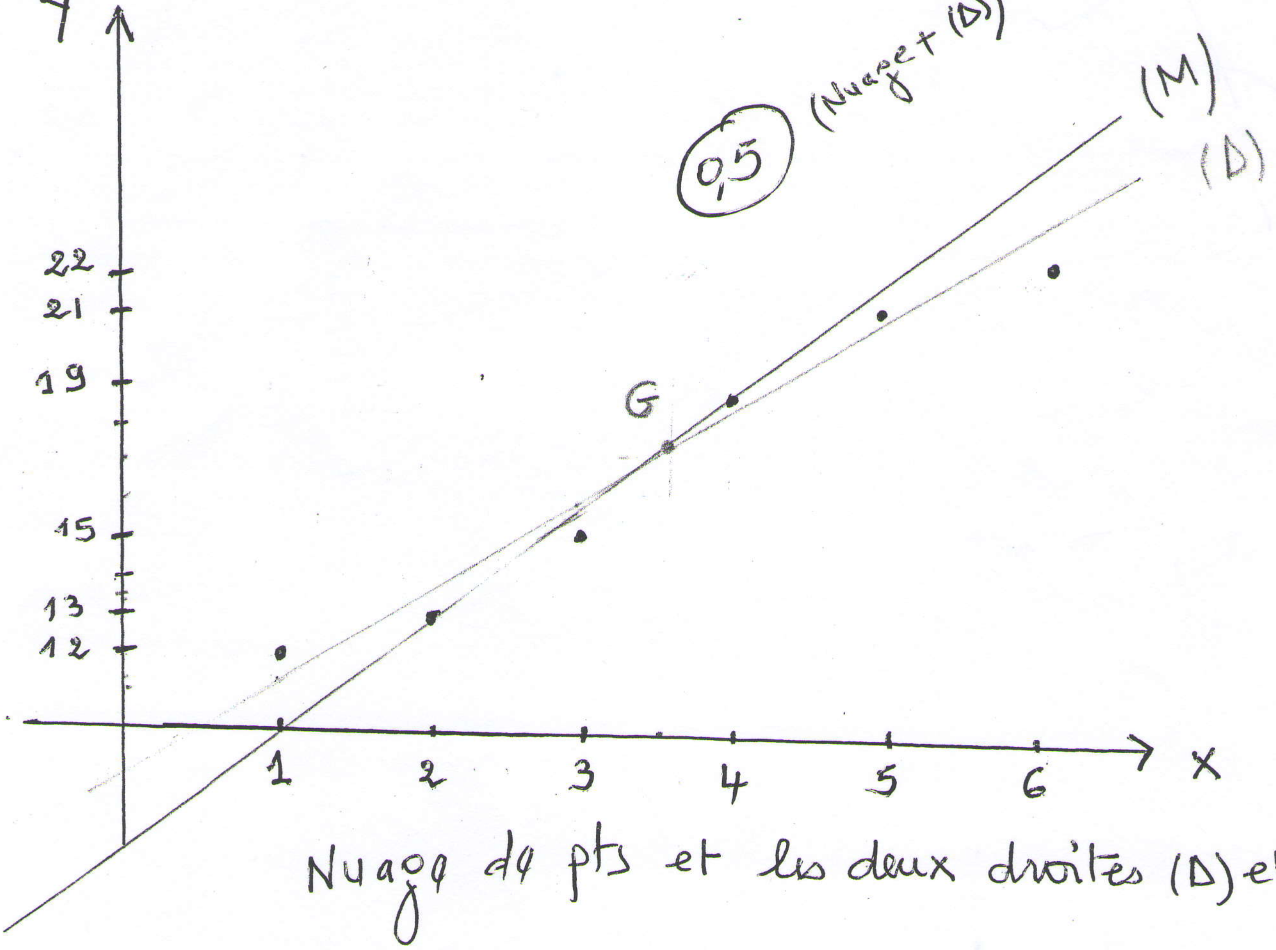
EXO N° 3 (07,00 pts)

1. le tableau statistique:

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	1	12	1	144	12
	2	13	4	169	26
	3	15	9	225	45
	4	19	16	361	76
	5	21	25	441	105
	6	22	36	484	132
Total	21	102	91	1824	396

Remarque: le nuage de pts a une forme linéaire 0,25

0,5 (Nuage + (D))



Nuage de pts et les deux droites (D) et (M)

2°) la Centre de gravité $G(\overline{X}, \overline{Y})$

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(21) = 3{,}5 \qquad 0{,}5$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{1}{6}(102) = 17 \qquad 0{,}5$$

Donc, $G(\overline{X}, \overline{Y}) = G(3{,}5\,;\,17)$.

3°) Droite de Régression de Y en X

(Δ) : $Y = aX + b$, avec

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}, \\ b = \overline{Y} - a\overline{X}. \end{cases}$$

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \overline{X}^2 \qquad 0{,}5$$

$$= \frac{1}{6}(91) - (3{,}5)^2 = 15{,}16 - 12{,}25 = 2{,}91$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} \qquad 0{,}5$$

$$= \frac{1}{6}(396) - (3{,}5)(17) = 66 - 59{,}5 = 6{,}5$$

0,25 $a = \dfrac{6{,}5}{2{,}91} = 2{,}23$, et

0,25 $b = 17 - (2{,}23)(3{,}5) = 9{,}195$

(Δ) : $Y = 2{,}23\,x + 9{,}195$ 0,25

4) le Coefficient ρ

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \; \sigma_y},$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2{,}91} = 1{,}70$$

$$V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} y_i^2 - \bar{y}^2$$

$$= \frac{1}{6}(1824) - (17)^2 = 304 - 289 = 15$$ 0,5

$$\sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{15} = 3{,}87$$

Alors,

$$\rho_{xy} = \frac{6{,}5}{(1{,}70)(3{,}87)} = 0{,}98$$ 0,5

Conclusion :

$\rho_{xy} = 0{,}98 \Rightarrow$ Il existe une forte

0,5 liaison linéaire entre x et y.

5) L'équation de la droite de Mayer (M)

$E_1 = \{(1,12), (2,13), (3,15)\}$

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{1}{3}(6) = 2$$

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{3} y_i = \frac{1}{3}(39) = 13,33$$

Donc $G_1(\overline{X}_1, \overline{Y}_1) = G_1(2 ; 13,333)$. 0,25

$E_2 = \{(4,19), (5,21), (6,22)\}$.

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{15}{3} = 5$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} y_i = \frac{62}{3} = 20,66.$$

Donc $G_2(\overline{X}_2, \overline{Y}_2) = G_2(5 ; 20,66)$. 0,25

$G_1 \in (M) \Rightarrow \overline{Y}_1 = a\overline{X}_1 + b \Rightarrow 13 = 2a + b$ — ①

$G_2 \in (M) \Rightarrow \overline{Y}_2 = a\overline{X}_2 + b \Rightarrow 20,66 = 5a + b$ — ②

① − ② $\Rightarrow a = \dfrac{13,33 - 20,66}{2-5} = \dfrac{-7,33}{-3} = 2,443$. 0,5

Dans ① $\Rightarrow b = 13,33 - 2(2,443) = 8,443$. 0,25

L'equation de la droite de Mayer

$(M) : Y = ax + b$ 0,25

$= 2,443x + 8,443.$

6°/ L'estimation du chiffre d'affaire fin $7^{\text{ème}}$ mois

donc $X = 7$

En utilisant : 0,5

$(\Delta) : Y = 2,23X + 9,18 = 2,23(7) + 9,18 = 24,79.$

ou

$(M) : Y = 2,443X + 8,443 = 2,44(7) + 8,443 = 25,52$

Fin

Mr BOUALEM

le 15.02.19