Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2022 / 2023

Corrigé de la série de TD n°3

Exercice n°2

1. On suppose que $A_1 \subset A_2$ et on montre que $f(A_1) \subset f(A_2)$.
Soit $y \in f(A_1)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1 : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A_2 : y = f(x) \text{ car } A_1 \subset A_2 \\ &\Longrightarrow y \in f(A_1). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Longleftrightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [\exists x \in A_1 \text{ ou } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [\exists x \in A_1 : y = f(x)] \text{ ou } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\ &\Longleftrightarrow y \in (f(A_1) \cup f(A_2)). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
3. On suppose que $B_1 \subset B_2$ et on montre que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\Longrightarrow f(x) \in B_1 \\ &\Longrightarrow f(x) \in B_1 \,\text{car}\, B_1 \subset B_2 \\ &\Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

Exercice n°2

Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. g n'est pas injective car : $-1 \neq 1$ et $g(-1) = g(1)$.
Elle n'est pas surjective car : pour $y = -2; \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq -2 (g(x)$ est toujours positive).
Injectivité de f : $f'(x) = 2 > 0$, $\Rightarrow$ f est strictement croissante d'où l'injectivité

de f.
Surjectivité de f :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$
$y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}$,
Donc, $\forall y \in \mathbb{R}; \exists x = \frac{y-5}{2} \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$
D'où f est surjective.
2.On a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{2}{x^2+1} + 5$$

et

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = \frac{1}{(2x+5)^2+1}.$$

Alors, $f \circ g \neq g \circ f$.
3. Calculons : $f(\{0,1\}), f^{-1}(\{5\}), f([0,1]), f(\mathbb{R}), f^{-1}([5,7])$,

$$\begin{aligned} f(\{0,1\}) &= \{f(x)/x \in \{0,1\}\} \\ &= \{f(0), f(1)\} \\ &= \{5,7\}. \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 5\} = \{x \in \mathbb{R}/2x+5 = 5\} = \{0\}$$

Comme f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Alors :
$f([0,1]) = \{f(x)/x \in [0,1]\} = [f(0), f(1)] = [5,7]$.

$f(\mathbb{R}) = \{f(x)/x \in \mathbb{R}) =\} =]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f^{-1}([5,7]) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [5,7]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/2x+5 \in [5,7]\} \end{aligned}$$

$$2x+5 \in [5,7] \Longleftrightarrow 5 \leq 2x+5 \leq 7 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \leq 7 \ldots .(1) \\ \text{et} \\ 2x+5 \geq 5 \ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Longleftrightarrow 2x+5 \leq 7 \\ &\Longleftrightarrow x \leq 1 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 1] \\ (2) &\Longleftrightarrow 2x+5 \geq 5 \\ &\Longleftrightarrow x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in]0, +\infty] \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}([5,7]) =]-\infty, 1] \cap]0, +\infty] = [0,1]$
4. Calculons $g^{-1}(\{1\})$, $g([-4,4])$,, $g^{-1}([-4,-1])$ et $g^{-1}([0,4[)$.

- $g^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}/g(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{x^2+1} = 1\} = \{0\}$
  g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$. en effet :
  $g'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

- $$\begin{aligned} g([-4,4]) = \{g(x)/x \in [-4,4]\} &= \{g(x)/x \in [-4,0] \cup]\,0,4]\} \\ &= \{g(x)/x \in [-4,0]\} \cup \{g(x)/x \in]0,4]\} \\ &= [g(-4), g(0)] \cup [g(4), g(0)[\\ &= \left[\frac{1}{17}, 1\right] \cup \left]\frac{1}{17}, 1\right] \\ &= \left[\frac{1}{17}, 1\right]. \end{aligned}$$
- $g^{-1}([-4,-1]) = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \in [-4,-1]\} = \emptyset$ car $g(x) > 0$.
- $g^{-1}([0,4[) = g^{-1}(]0,1[) = \mathbb{R}$ car : $0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice n°3

1. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

(a) Calculons $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-6\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{-6\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = -6\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x - 3 = -6\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x + 3 = 0\right\} \\ &= \emptyset. \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x - 3 = 0\right\} \\ &= \{-3, 1\} \end{aligned}$$

(b) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f. i. Injectivité de f : D'après la question précédente, on a $f(-3) = 0 = f(1)$ mais $-3 \neq 1$. Donc f n'est pas injective.
ii. Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = -6$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).

iii. Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).
(c) Donnons des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective et déterminons l'application réciproque f^{-1}.
Il est facile de vérifier que $f :]-\infty, -1] \longrightarrow [-4, +\infty[$ est une bijection et que

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-4, +\infty[&\longrightarrow]-\infty, -1] \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = -1 - \sqrt{4+y}. \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi considérer la bijection $f : [-1, +\infty[\longrightarrow [-4, +\infty[$ et dans ce cas

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-4, +\infty[&\longrightarrow [-1, +\infty[\\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4+y} \end{aligned}$$

Exercice n°4

Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifions que pour tout réel a non nul on a : $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$h(a) - h\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4a}{a^2+1} - \frac{4\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1} = 0 \Rightarrow h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right).$$

On en déduit que h n'est pas injective car par exemple : pour $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}, x_1 \neq x_2$ mais d'après la question précédente $h(2) = h\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$par $f(x) = h(x)$.
a) Montrons que f est injective.

$$\forall x_1, x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Soient $x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2)$. on a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ ou } \left(x_1 = \frac{1}{x_2}\right) \end{aligned}$$

si $x_1 = \frac{1}{x_2}$ et $x_1, x_2 \in I$ ce ci entraine que $x_1 = x_2 = 1$. Donc f est injective.
b) Vérifions que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$
Soit $x \in I$

$$f(x) - 2 = \frac{-2(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2.$$

c) Montrons que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et déterminons $f^{-1}(x)$.
On a : f est injective, de plus f est surjective

$\forall y \in]0,2], \exists x \in [1,+\infty[$ tel que : $f(x) = y$.
En effet :

$$\frac{4x}{x^2+1} = y \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0,$$

$\Delta = 16 - 4y^2 \geq 0$ car : $y \in]\,0,2]$.
Alors l'équation $yx^2 - 4x + y = 0$ admet deux solutions

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} \text{ ou } x_2 = \frac{2-\sqrt{4-y^2}}{y}$$

Comme $y \in]0,2]$, donc on prend $x_1 \in [1,+\infty[$ et on rejette x_2 car $x_2 \notin [1,+\infty[$.
En effet

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{4-y^2}}{y} = \frac{y}{2+\sqrt{4-y^2}} = \frac{1}{x_1} \notin [1,+\infty[.$$

Donc $\forall y \in]0,2], \exists x = x_1 = \dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} \in [1,+\infty[$: tel que $f(x) = y$.

Conclusion : f est bijective car elle est injective et surjective.
De plus l'application réciproque est :

$$f^{-1} : \quad]0,2] \to [1,+\infty[$$

$$x \to f^{-1}(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}.$$