Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2022 / 2023

Série de TD n°4 : Les fonctions

Exercice n°1

I. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \leq 1 \\ e^{x-1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

II. peut-on prolonger par continuité au point x_0 les fonctions suivantes ?Donner ce prolongement lorsqu'il existe

$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$, $f_2(x) = \frac{x^3+8}{x+2}$, $x_0 = -2$

Exercice n°2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier, selon les valeurs de a et b, la continuité de g sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminez a et b pour que g soit dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice n°3

I. Montrer que l'équation

$$\operatorname{tg} x + \frac{x}{3} = 0$$

admet une solution unique sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

II. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction définie par :

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1 \quad \text{dans } [0, \pi]$$

puis déduire que l'équation

$$\sin x + \cos x = 0$$

admet au moins une solution dans $]0, \pi[$.

III. 1) Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2) En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

3) Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1\left[, \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\right.$