Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ année ST
Année universitaire
2022 / 2023

Corrigé de la série de TD n°4

Exercice n°1

I)Continuité de f sur $\mathbb{R}$:
a) f est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ car la fonction $x \longmapsto 2x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty, 1[$ et la fonction $x \longmapsto e^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]1,+\infty[$ Donc f est continue $\mathbb{R}-\{1\}$.
b) continuité de f en 1 :
Pour que f soit continue en 1 , il faut et il suffit que :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = f(1).$$

On a $f(1) = 2 - 1 = 1$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left(e^{x-1}\right) = 1$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} 2x - 1 = 1.$$

Donc f est continue en 1.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

II. a) On a $\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ et $\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$.
Comme $\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \neq \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, alors $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ n'existe pas en 0 donc f_1 n'est pas prolongeable par continuité en 0.
b) Soit f_2 définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^3+8}{x+2}$.
On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^3+8}{x+2} \\
&= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{x+2} \\
&= \lim_{x \to -2} \left(x^2-2x+4\right) \\
&= 12
\end{aligned}$$

Donc f_2 est prolongeable par continuité en -2. On définit ce prolongement par

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
x \quad &\longmapsto \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 12 & \text{si } x = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice n°3

1. Continuité de g sur $[0,+\infty[$:
a) g est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc en particulier sur $[0,1[$ et la fonction $x \longmapsto ax^2+bx+1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]1,+\infty[$.
Donc g est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[, \forall a,b \in \mathbb{R}$.
b) continuité de g en 1 : Pour que g soit continue en 1 , il faut et il suffit que :

$$\lim_{x\geq 1} g(x) = \lim_{x\leq 1} g(x) = g(1).$$

On a $g(1)=\sqrt{1}=1$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \left(ax^2+bx+1\right) = a+b+1$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \sqrt{x} = 1.$$

Donc g est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} g(x) = g(1),$$

c'est à dire, si et seulement si $a=-b$.
Conclusion : g est continue sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $a=-b$.
2. a) Dérivabilité de g sur $]0,+\infty[$: g est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc en particulier sur $]0,1[$ et la fonction $x \longmapsto ax^2+bx+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]1,+\infty[$.
Donc g est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[, \forall a,b \in \mathbb{R}$.
b) Dérivabilité de g en 1 : On impose la condition $a=-b$ car sinon g n'est pas continue en 1 , donc g n'est pas dérivable en 1 . On a $g(1)=\sqrt{1}=1$.

$$\begin{aligned}
g'_d(1) = \lim_{\substack{>1 \\ x\to 1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{ax^2+bx+1-1}{x-1} \\
&= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{-bx(x-1)}{x-1} \text{ car } a=-b \\
&= \lim_{\substack{\geq \\ x\to 1}} (-bx) \\
&= -b.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g'_g(1) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\
&= \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc g est dérivable en 1 si et seulement si

$$g'_d(1) = g'_g(1),$$

c'est à dire, si et seulement si

$$\begin{cases} -b = \frac{1}{2} \\ \text{ et} \\ a = -b, \end{cases}$$

c'est à dire, si et seulement si

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \text{ et} \\ b = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Conclusion : g est dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{-1}{2}$.

Exercice n°3

I. La fonction $x \longrightarrow \operatorname{tg} x$ est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et la fonction $x \longrightarrow \frac{x}{3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \longrightarrow \operatorname{tg} x + \frac{x}{3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, en particulier $x \longrightarrow \operatorname{tg} x + \frac{x}{3}$ est continue sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Comme

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{4} < 0$$

et

$$f(\pi) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} > 0$$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution dans $]\frac{3\pi}{4}, \pi[$.

On a

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + \frac{4}{3} > 0, \quad \forall x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.
f est continue, strictement monotone sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, alors l'équation $\operatorname{tg} x + \frac{x}{3} = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.
II. La fonction $x \longrightarrow e^x \sin x - 1$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$(Comme f est la somme et produit de fonctions élémentaires définies sur $\mathbb{R}$ en particulier continue sur $[0, \pi]$, dérivable sur $]0, \pi[$.
Comme $f(0) = f(\pi) = -1$; D'après Rolle il existe un réel $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$. Donc $e^c(\sin c + \cos c) = 0$ c'est à dire $\sin c + \cos c = 0$ car $e^c \neq 0$.
Ainsi l'équation

$$\sin x + \cos x = 0$$

admet au moins une solution dans $]0, \pi[$.

III.1. Arctan x est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]a, b[: \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a = \arctan' c(b - a)$$

Comme $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

d'où le résultat.
2. Il suffit d'écrire l'encadrement précédent pour $a = 1$ et $b = 4/3$.
3.
Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$, pour tout $x \in$]-1,1[,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ainsi f est constante $]-1, 1[$, alors

$$f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

donc $\forall x \in]-1, 1\left[: \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\right.$.