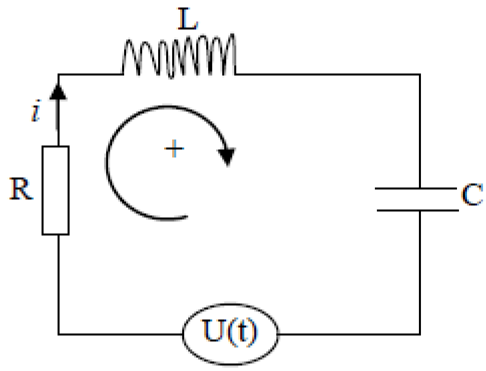
Solution de la série de TD n°4

Exo1



on a : $V_L + V_C + V_R = U$

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt + Ri = U \Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = U$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}q = \frac{U_0 cos(\Omega t)}{L} \qquad \Leftrightarrow \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + {\omega_0}^2 q = \frac{U(t)}{a}$$

Par analogie, on trouve :

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = \dfrac{R}{L} \\ {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{LC} \\ a = L \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}} \quad \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{Lc} = 1.4s$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} = 4\ s^{-1}$$

2. la solution transitoire

L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3cos(3t)$$

La solution générale est :

$$q(t) = q_T(t) + q_p(t)$$

$q_T(t)$: est la solution homogene, calculée lorsque $U(t) = 0$. L'équation du mouvement s'écrit dans cas :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 0$$

$\Delta' = \lambda^2 - {\omega_0}^2 = 16 - 20 = -4 < 0$, alors le mouvement est pseudopériodique

Et : $q_T(t) = Ae^{-4t}\cos(\omega t + \theta)$

$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$=2 rad/s

$q_T(t) = Ae^{-4t}\cos(2t + \theta)$

La solution particulière (permanente) est calculée quand $U(t) \neq 0$. Soit l'équation du mouvement :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3cos(3\text{t})$$

Et la solution horaire :

$$q_p(t) = q_0\cos(3t + \varphi)$$

Trouver q_0 *et* φ

$$q_p(t) = q_0 e^{i(3t+\varphi)} = q_0 e^{i\varphi} e^{3it}$$

En remplaçant la solution dans l'équation différentielle,

$$-9q_0e^{i\varphi} + 24iq_0e^{i\varphi} + 20q_0e^{i\varphi} = 5.3 \ \Rightarrow \ q_0e^{i\varphi}(11 + 24i) = 5.3$$

$$q_0 = \frac{5.3}{\sqrt{11^2 + 24^2}} = 0.2$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{24}{11}\right) = -65.4° = -1.14\, rad$$

Et la solution particulière :

$$q_p(t) = 0.2cos(3t - 1.14)$$

$$q(t) = Ae^{-4t}cos(2t + \varphi) + 0.2cos(3t - 1.14)$$

3. La permanente est calculée quand $q_T(t) \to 0$, elle est donnée par

$$q(t) = 0.2cos(3t - 1.14)$$

4. la condition sur R pour qu'il y ait résonance est : ${\omega_0}^2 - 2\lambda^2 > 0$

$${\omega_0}^2 - 2\lambda^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} > 0 \Rightarrow R < \sqrt{\frac{2L}{C}} = 64{,}24\ \Omega$$

Exo2

Solution :

1. $T = T_{m_1} + T_M + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1(2L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}MR^2\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 + 4m_1L^2 + m_2L^2)\ \dot{\theta}^2.$
   $U = U_{m_1} + U_{k_1} + U_{m_2} + U_{k_2} \approx 2m_1gL\theta + \frac{1}{2}k_1(y_{01}+2L\theta)^2 - m_2gL\theta + \frac{1}{2}k_2(y_{02} + L\theta)^2.$
   $\approx \frac{1}{2}(4k_1 + k_2)L^2\theta^2 + C^{te}.$

(La condition d'équilibre élimine les termes linéaires en θ.) $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_1^2 + \frac{1}{2}\alpha v_2^2 = 2\alpha L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\alpha L^2 \dot{\theta}^2 = \frac{5}{2}\alpha L^2 \dot{\theta}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}MR^2 + (4m_1 + m_2)L^2]\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(4k_1 + k_2)L^2\theta^2$. $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} + FR \Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{10\alpha L^2}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}\dot{\theta} + \frac{(8k_1 + 2k_2)L^2}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}\theta = \frac{2F_0 R}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}\sin\Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = (2F_0R/a)\sin\Omega t$.

$$\lambda = \frac{5\alpha L^2}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}. \quad \omega_0^2 = \frac{(8k_1 + 2k_2)L^2}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}. \qquad a = MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2.$$

La solution permanente est $\theta = A\sin(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l} (2F_0R/a)\sin\Omega t \longrightarrow (2F_0R/a)e^{j\Omega t} \\ \theta = A\sin(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}. \end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (2F_0R/a)e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{2F_0R/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \frac{2F_0R/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

4. La pulsation de résonance (pour $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$) est $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Lorsque $\lambda \ll \omega_0$: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{max}}{2}$ pour $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.} \Longrightarrow \boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

6. **A.N:** $\Omega_R \approx \mathbf{3,25}$rad/s. $\quad B \approx \mathbf{0,39}$Hz. $\quad$ Le facteur de qualité est $Q = \omega_0/B \approx \mathbf{8,33}$.