SERIE N°1 (SUITE)

Corrigé

Exercice 01 :

Les fonctions périodiques sont : a, c, d, e, f.

T (a) = T (e)=3s

T(c)=T(d)=T(f)=4s

Les fonctions (c) et (d) sont des fonctions sinusoïdales.

L'amplitude de chaque fonction est A=2.

(c) : $pour\ t = 0\ ;\ 2\,cos(0+\varphi) = 1 \Rightarrow cos\,\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$.

$g(t) = 2\,cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $pour\ t = 0\ ;\ 2\,cos\,(0+\varphi) = -1 \Rightarrow cos\,\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$

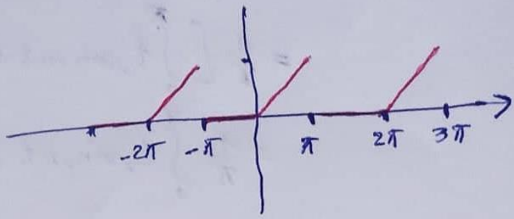
$$g(t) = 2\,cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exercice 02 :

1. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/_{2.5}}{2\pi/_{8}} = \frac{16}{5}$, nombre rationnel→ mouvement résultant périodique
   $T = 5T_1 = 16T_2 = 4\pi s$
2. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/_{\pi}}{2\pi/_{5}} = \frac{5}{\pi}$, nombre non rationnel→ mouvement non périodique.
3. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/_{3\pi}}{2\pi/_{7\pi}} = \frac{7}{3}$, nombre rationnel→ mouvement périodique $T = 3T_1 = 7T_2 = 2\pi s$
4. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/_{\sqrt{2}}}{2\pi/_{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ombre non rationnel→ mouvement non périodique.

EXO 3 : on a $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$

1. Le graphe de $f(t)$



$f(t)$ périodique : $T = 2\pi s$

2. • $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0.\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\,dt$

$\Rightarrow a_0 = \left.\frac{t^2}{2}\right|^{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi}{4}$

• $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \quad ; \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{0\cos nt\,dt}_{0}\right]$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt$

$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(t \cdot \frac{1}{n}\sin nt\right) - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nt\,dt\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{t\sin nt}{n}\right)_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nt\right]_0^{\pi}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

pour $n = 2p \Rightarrow a_n = 0$

pour $n = 2p+1 \Rightarrow a_n = \frac{-2}{(2p+1)^2}\,\frac{1}{\pi} = \frac{-2}{\pi(2p+1)^2}$

$\bullet\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\sin nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\,\cancel{\sin nt}\,dt\right.$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\,dt$

on intègre par partie : on pose $v = t \Rightarrow v' = 1$; $u' = \sin nt \Rightarrow u = -\frac{1}{n}\cos nt$

$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nt\,dt\right]$

$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)$

$= -\frac{1}{n}(-1)^n$

pour $n = 2p \Rightarrow b_n = -\frac{1}{2p}$

pour $n = 2p+1 \Rightarrow b_n = +\frac{1}{2p+1}$

3. Calculer les coefficients c_n

soit : $c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$

$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\, e^{-int}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\, e^{-int}\, dt$$

Intégration par partie :

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-int}\, dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\frac{1}{in} e^{-int} \end{cases}$$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

on trouve : $c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{n^2} + i\,\frac{t\, e^{-int}}{n}\right]_0^{\pi}$

$$c_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2} + i\,\frac{(-1)^n}{2n} \quad ; n \neq 0$$

si $n = 0$, on utilise la formule $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\, dt = \frac{\pi}{4} = 0,8$

4. Le spectre $|c_n|$ en $f(n\omega)$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$