Corrigé de la série 02

Exercice 01 :

1.

Figure	Le nombre de degré de liberté	Coordonnées généralisées
a	2	Θ1
b	2	Θ1, Θ2
c	2	Θ
d	1	x, y

2. Energie cinétique et l'énergie potentielle des systèmes qui ont 1 DDL :

a) $T = T_{m_1}+T_{m_2} + T_{M_1} + T_{M_2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$

$= \frac{1}{2}m_1(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(R\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}M_1 r^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}M_2 R^2\dot{\theta}_2^2.$

Puisque le fil est inextensible et ne glisse pas sur les disques, Alors $R\theta_2 = r\theta_1$.

$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2)r^2\dot{\theta}_1^2$

$U = U_{m1}+U_{m2} + U_{ressort} = -m_1 gh_1 - m_2 gh_2+\frac{1}{2}kh_1^2$

$= -g(m_1 r\theta_1 + m_2 R\theta_2)+\frac{1}{2}kr^2\theta_1^2 = -g(m_1 + m_2)r\theta_1+\frac{1}{2}kr^2\theta_1^2.$

c) $T = T_m+T_M + T_{2m} = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.2mv_{2m}^2$

$= \frac{1}{2}m(2r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}M\,(2r)^2\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.2m(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\,(6m + 2M)\,r^2\ \dot{\theta}^2.$

$U = U_m+U_{ressort1} + U_{ressort2} = -mgh+\frac{1}{2}kh^2 + \frac{1}{2}.2kx^2 = -mg\,(2r\theta) +\frac{1}{2}k\,(2r\theta)^2 + k\,(r\theta)^2$

$= -2mgr\theta+3kr^2\theta^2.$

- **Position d'équilibre pour chaque système :**

a) $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \Longrightarrow -g(m_1 + m_2)r + kr^2\theta_1 = 0 \Longrightarrow \theta_1 = \frac{g(m_1 + m_2)}{kr}.$

c) $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow -2mgr + 6kr^2\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{mg}{3kr}.$

- **Condition d'oscillation :**

Pour qu'un système oscille il faut qu'il regagne sa position d'équilibre après chaque écartement, donc la condition d'oscillation d'un système est que l'équilibre soit stable : $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$:

a) $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2}\right|_{\theta_1=\frac{g(m_1+m_2)}{kr}} = kr^2 > 0$: Donc en $\theta_1 = \frac{g(m_1+m_2)}{kr}$ l'équilibre est **stable.**

c) $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\frac{mg}{3kr}} = 6kr^2 > 0$: Donc en $\theta = \frac{mg}{3kr}$ l'équilibre est **stable**.

Exercice 02 :

1- Système libre à 1 ddl.

2- L'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U :

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$U = E_{P(K)} + E_{P(K)} = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K x^2 = K x^2$$

$$L = T - U$$

3- L'équation du mouvement: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) + \frac{dU}{dx} = 0$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$M\ddot{x} + 2kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{M} x = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

La période propre T_0 : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{200}} = 0{,}314\ \mathrm{s}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{0.5}} = 3{,}184\ \mathrm{Hz}$

4-la solution finale est :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \\ x(0) = A = 1\ \mathrm{cm} = 0.01\mathrm{m} \end{cases}$$

Alors : $x(t) = 0{,}01\cos(\omega_0 t)\ \mathrm{m} \Rightarrow x(t) = 0{,}01\cos(20t)\ \mathrm{m}$

5- Energie Totale :

$$E(t) = T(t) + U(t)$$

$$E(t) = E(0) = T(0) + U(0)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2(0) + K x^2(0) = K.A^2 = 100 \times (0.01)^2$$

$$E(t) = 0.01\,J$$

Exercice 03 :

1. Le moment d'inertie du système :

$$I_M = I_{M/CG} + I_{M/O}$$

$$I_M = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

2. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$T = \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = U_M + U_k = Mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

Avec $h = L(1 - cos\theta) = L\frac{\theta^2}{2}$ et $x = L\,sin\theta = L\theta$

$$U = MgL\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}k(L\theta)^2 = \frac{1}{2}(MgL + kL^2)\theta^2$$

3. Le lagrangien s'écrit par :

$$L = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(MgL + kL^2)\theta^2$$

On aboutit l'équation de mouvement suivante :

$\ddot{\theta} + 3\left(\frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)\theta = 0$, La pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{3\left(\frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)}$

4. la solution finale est :

$$\theta = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Longrightarrow \dot{\theta} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \theta(t = 0) = A\cos(\varphi) = \dfrac{\pi}{22} \\ \dot{\theta}(t = 0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$$

$$A\cos(\varphi) = \frac{\pi}{22} \Longrightarrow A = \frac{\pi}{22} \Longrightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{22}\cos(\omega_0 t)$$

Exercice 04 :

1- l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U :

$$T = T_M + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \text{ , avec } x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2$$

$$U = U_{(K)} = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

2- Fonction de Lagrange :

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta$$

Donc : $\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k}{M+2m}\theta = 0$

3- la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 :

La pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{2K}{M+2m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M+2m}} = \sqrt{\frac{120}{3}} = 6{,}324 \text{ rad.s}^{-1}$

La période propre T_0 : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{120}} = 0{,}992 \text{ s}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M+2m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{120}{3}} = 1{,}007 \text{ Hz}$

4- $\theta(t) = \frac{\pi}{22}\cos(\omega_0 t)$