Corrigé série TD 03

Exercice n 01 :

1. Equation du mouvement :
   a. Energie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m(4a)^2)}{12} + ma^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{7ma^2}{6}\dot{\theta}^2$$

   b. Energie potentiel :

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$

   c. Fonction de Dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(3a\dot{\theta}\right)^2 = \frac{9}{2}\alpha a^2\dot{\theta}$$

   d. Equation de mouvement :

$$\frac{7ma^2}{3}\ddot{\theta} + 9a^2\alpha\dot{\theta} + ka^2\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{27\alpha}{7m}\dot{\theta} + \frac{3k}{7m}\theta = 0$$

   Avec : $\lambda = \frac{27\alpha}{14m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{7m}}$

2. Calcul de α et k:
   a. Calcul du coefficient de frottement α :

$$\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{q_0}{q_n}\right) = \frac{1}{4} ln\left(\frac{\theta_0}{\frac{\theta_0}{10}}\right) = \frac{1}{4} ln(10) = 0.57$$

On a $\lambda = \frac{\delta}{T_a} = 0.96\ s^{-1},\ or \lambda = \frac{27\alpha}{14m} \Longrightarrow \alpha = \frac{14m\delta}{27T_a} = \frac{14\ .10\ .\ 0.57}{27\ .\ 0.6} = 4.92\ kg.s^{-1}$

   b. Détermination du k :

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 10.47\ \ , or\ \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{3k}{7m}} \Longrightarrow k = \frac{7m(\omega_a^2 - \lambda^2)}{3} = \frac{7\ .\ 10\ .\ (10.47^2 + 0.96^2)}{3}$$

$$k = 2568\ kg.s^{-2}$$

Exercice 02

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(2mR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)\dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + 2mgR\left(1 - \cos\theta\right) - mgR\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + mgR\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}mgR\theta^2 = \frac{1}{2}\left(kR^2 + mgR\right)\theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)\ddot{\theta} + \left(kR^2 + mgR\right)\theta + \left(\alpha R^2\right)\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(\alpha R^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}\dot{\theta} + \frac{\left(kR^2 + mgR\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}\theta = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\left(kR^2 + mgR\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}} = \sqrt{\frac{2\left(kR + mg\right)}{MR + 6mR}}$$

$$\lambda = \frac{\left(\alpha R^2\right)}{2\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}$$

La valeur maximale que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

Pour qu'un système amorti oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo périodique, donc

$$\omega_0^2 - \lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 < \omega_0^2$$

$$\left(\frac{\alpha}{M + 6m}\right)^2 < \frac{2\left(kR + mg\right)}{R\left(M + 6m\right)} \Rightarrow \alpha^2 < \left(M + 6m\right)^2\frac{2\left(kR + mg\right)}{R\left(M + 6m\right)}$$

$$\Rightarrow \alpha < \sqrt{\frac{2\left(kR+mg\right)\left(M+6m\right)}{R}} \;;\; AN: \alpha < 37N\, s/m$$

Le temps nécessaire pour que l'amplitude diminue à 1/5 de sa valeur.

Le régime est pseudo périodique, l'équation horaire est de la forme :

$$\theta(t) = \mathbf{A}\, e^{-\lambda t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right) t + \phi\right)$$

Pour que l'amplitude diminue à 1/5 de sa valeur il faut un temps τ tel que :

$$\mathbf{A}\; e^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}\, \mathbf{A} e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{1}{5} \Rightarrow e^{-\lambda t - \lambda\tau + \lambda t} = \frac{1}{5} \Rightarrow \ln\left(e^{-\lambda\tau}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow -\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \tau = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = 1.36s$$