Université A. Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique
Niveau : L2 (ELT, ELM)

Année Universitaire : 2022/2023
Semestre : 03
Matière : Physique 03

Corrigé de la série de TD N°1

EXERCICE 1

Les oscillations harmoniques d'un point matériel sont décrites par l'équation :

$$x(t) = 0.5\cos(25t + \frac{\pi}{4})(m)$$

1. Trouver l'amplitude **A** et la pulsation $\boldsymbol{\omega}$.
2. Déterminer la fréquence $\boldsymbol{f}$, la période du mouvement $\boldsymbol{T}$ et déphasage initial$\boldsymbol{\varphi}$.

Correction

1. **A=0.5 m,** $\boldsymbol{\omega = 25\, rad/s}$
2. **On a** $\boldsymbol{\omega = 2\pi f = 25 \Rightarrow f = \frac{12.5}{\pi} = 3.98\, Hz}$ **,** $\boldsymbol{T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.98} = 0.25\, s}$ **et**

   $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{4}\, rad}$

EXERCICE 2

Une particule vibre autour d'une position d'équilibre prise comme origine avec une fréquence de 100 Hz et une amplitude de 2 mm, Sachant que $v(0) = 0$. Ecrire l'équation horaire du mouvement, puis l'équation horaire de la vitesse.

Correction

A=$\boldsymbol{2.10^{-3} m}$

$\boldsymbol{\omega = 2\pi f = 628\, rad/s}$

L'équation horaire : $\boldsymbol{x(t) = Acos(\omega t + \varphi)} \Rightarrow$ **v(t)=** $\boldsymbol{\dot{x}(t) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)}$

On a v(0)=)= $\boldsymbol{\dot{x}(0) = -A\omega sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0}$

L'équation horaire s'écrite donc : $\boldsymbol{x(t) = 2.10^{-3} cos(628t)(m)}$

L'équation horaire de la vitesse est : v(t)= $\boldsymbol{\dot{x}(t) = -1.256 sin(628t) =}$
$\boldsymbol{1.256\, cos\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)}$**(m/s)**

EXERCICE 3

Calculer les dérivées suivantes :

$\boldsymbol{a.}\frac{d}{dt}e^{j(\omega t+\varphi)}$ $=\boldsymbol{j\omega e^{j(\omega t+\varphi)}}$ $\boldsymbol{b.}\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \varphi) = \boldsymbol{\omega \cos(\omega t + \varphi)}$ $\boldsymbol{c.}\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi) =$
$\boldsymbol{-\omega \sin(\omega t + \varphi)}$

Université A. Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique
Niveau : L2 (ELT, ELM)

Année Universitaire : 2022/2023
Semestre : 03
Matière : Physique 03

$\boldsymbol{d.}\ \frac{d}{dt}\left(\ddot{x}(t)+16\dot{x}(t)+64x(t)\right)= \frac{d\ddot{x}(t)}{dt}+16\,\frac{d\dot{x}(t)}{dt}+64\,\frac{dx(t)}{dt} =\left(\frac{\partial\ddot{x}(t)}{\partial\ddot{x}(t)}\frac{d\ddot{x}(t)}{dt}\right)+16\left(\frac{\partial\dot{x}(t)}{\partial\dot{x}(t)}\frac{d\dot{x}(t)}{dt}\right)$
$+64\left(\frac{\partial x(t)}{\partial x(t)}\frac{dx(t)}{dt}\right) =\dddot{x}(t)+16\ddot{x}(t)+64\dot{x}(t)$

EXERCICE 4

Soient les amplitudes complexes suivantes **:**

$\underline{A}= (\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j)(1+\sqrt{3}j)$ et $\underline{B} =\frac{1+j}{-\sqrt{3}+j}$

1. Exprimer ces amplitudes complexes sous forme : $\underline{A}=ae^{i\varphi_1}\ et\ \underline{B}=be^{i\varphi_2}$ et determiner les valeurs de : $a, b, \varphi_1\ et\ \varphi_2$.
2. Soient les deux mouvements suivants : $x_1(t)=$ a $\cos(\omega t+\varphi_1)$ et $x_2(t)=$ b $\cos(\omega t+\varphi_2)$, déterminer la superposition de ces deux mouvements.

<u>Correction</u>

1)

a=$|\underline{A}|$=1.2=2 et $\boldsymbol{\varphi_1=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \underline{A}=2e^{j\frac{\pi}{6}}}$

b=$|\underline{B}|$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\boldsymbol{\varphi_2=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}=\frac{13\pi}{12}\Rightarrow \underline{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{13\pi}{12}}}$

2)

La superposition sous forme sinusoïdale est : $\boldsymbol{x(t)=x_1(t)+x_2(t)=2\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t+\frac{13\pi}{12})}$

La superposition par la représentation complexe est : $\boldsymbol{\underline{x(t)}=\underline{x_1(t)}+\underline{x_2(t)}=2e^{j(\omega t+\frac{\pi}{6})}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j(\omega t+\frac{13\pi}{12})}=(2e^{j\frac{\pi}{6}}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{13\pi}{12}})e^{j\omega t}}$

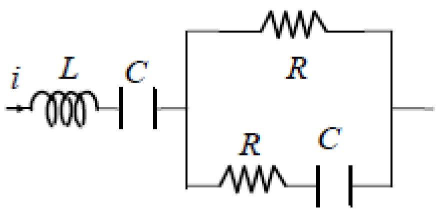
$\boldsymbol{=\underline{C}e^{j\omega t}}$ **avec** $\boldsymbol{\underline{C}=2e^{j\frac{\pi}{6}}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{13\pi}{12}}=ce^{j\varphi}}$

Avec : $$\boldsymbol{\begin{cases} c=|\underline{C}|=\sqrt{2^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2.2.\frac{\sqrt{2}}{2}cos(\frac{\pi}{6}-\frac{13\pi}{12})}=1.33 \\ tg\varphi=\frac{2sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}sin\frac{13\pi}{12}}{2cos\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}cos\frac{13\pi}{12}}=0.77\ \Rightarrow\varphi=arctg(0.77)=37.6°\end{cases}}$$

Alors : $\boldsymbol{x(t)=1.33cos(\omega t+37.6°)}$

EXERCICE 5

Soit le circuit ci-contre, où $i(t)=I_0 sin\omega t$.

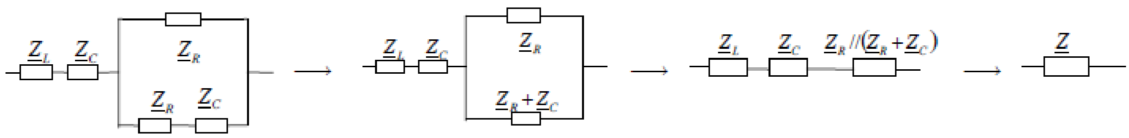


1. Trouver l'impédance complexe $\underline{Z}$ équivalente directement sans passer par les courants.

2. Comment se simplifie $\underline{Z}$ pour $LC\omega^2 = 1$? , *trouver dans ce* Cas le module de $\underline{Z}$ ainsi que sa phase φ.

Correction

(i) Les impédances complexes associées à R, L, et C sont respectivement :
$\underline{Z}_R = \mathrm{R}$, $\underline{Z}_L = j\mathrm{L}\omega$, $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}$. Nous avons alors les simplifications suivantes:



$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_R \cdot (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)}{\underline{Z}_R + (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)} = j\mathrm{L}\omega + \frac{1}{j\mathrm{C}\omega} + \frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}\right)}{2\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}} = \frac{1 - \mathrm{LC}\omega^2}{j\mathrm{C}\omega} + \frac{\mathrm{R}\,(1 + j\mathrm{RC}\omega)}{1 + j2\mathrm{RC}\omega}.$$

(ii) Pour $\mathrm{LC}\omega^2 = 1$, $\underline{Z}$ se simplifie en $\underline{Z} = \mathrm{R}\dfrac{1 + j\mathrm{RC}\omega}{1 + j2\mathrm{RC}\omega}$.

Son module est $|\underline{Z}| = \mathrm{R}\sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}{1 + 4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}}$.

Trouvons la phase: $\underline{Z} = \mathrm{R}\dfrac{1 + j\mathrm{RC}\omega}{1 + j2\mathrm{RC}\omega} = \mathrm{R}\dfrac{1 + 2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2 - j\mathrm{RC}\omega}{1 + 4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2} \Longrightarrow \tan\phi = \dfrac{\mathrm{Im}\,(\underline{Z})}{\mathrm{Re}\,(\underline{Z})} = \dfrac{-\mathrm{RC}\omega}{1 + 4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}$.