Exercice n°01 :

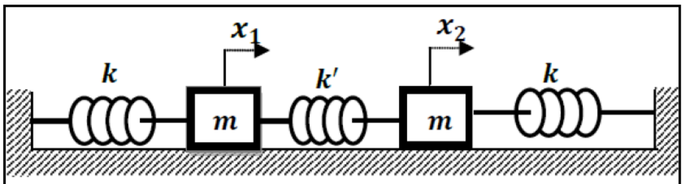

Figure 1

1- Déterminer le Lagrangien du système :

- L'énergie cinétique du système : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$
- L'énergie potentielle du système : $U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2)^2$

Donc : le Lagrangien est : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

2- Mettre ce Lagrangien sous la forme : $\boldsymbol{L = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \omega_0^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2Cx_1x_2\right)\right]}$.

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{m}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{k'}{m}(x_2^2 + x_1^2 - 2x_2x_1)]$$

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k + k')}{m}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2k'}{m}x_1x_2]$$

$$L = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k + k')}{m}\left[(x_1^2 + x_2^2) - \frac{2k'}{(k + k')}x_1x_2\right]\right]$$

$L = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2[(x_1^2 + x_2^2) - 2Cx_1x_2]\right]$, Avec $\omega_0^2 = \frac{(k+k')}{m}$, $C = \frac{k'}{(k+k')}$

3- Ecrire les équations de mouvement :

On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvemebt donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -m\omega_0^2(x_1 - Cx_2) \end{cases} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -m\omega_0^2(x_2 - Cx_1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = C\omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = C\omega_0^2 x_1 \end{cases} \ldots\ldots (1)$$

4- Déterminer les pulsations propres du système.

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$ On remplace dans la relation (1)

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - C\omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)x_2 - C\omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -C\omega_0^2 \\ -C\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -C\omega_0^2 \\ -C\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (C\omega_0^2)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \textit{Les pulsations propres du système.} \begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - C} \\ \omega_2 = \omega_0\sqrt{1 + C} \end{cases}$$

5- Donner les solutions $(\boldsymbol{t})$ et $(\boldsymbol{t})$ avec les conditions initiales suivantes :

$$\boldsymbol{x_1(0) = x_0, \dot{x}_1 = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2 = 0}$$

Calcul le modes d'oscillations :

Quand $\begin{cases} \omega = \omega_1 \Rightarrow \underline{A_{11}} = \underline{A_{21}}, A_{11} = A_{21} et\ x_1 = x_2 \\ \omega = \omega_2 \ \underline{\Rightarrow A_{12}} = -\underline{A_{22}}, A_{12} = -A_{22} et\ x_1 = -x_2 \end{cases}$

La solution :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les conditions initiales

$$x_1(0) = x_0 \Rightarrow A_{11}cos\varphi_1 + A_{12}cos\varphi_2 = x_0$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow A_{11}cos\varphi_1 - A_{12}cos\varphi_2 = 0$$

$$\dot{x_1}(t) = -A_{11}\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12}\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{x_1}(0) = 0 \Rightarrow -A_{11}\omega_1 \sin\varphi_1 - A_{12}\omega_2 \sin\varphi_2 = 0$$

$$\dot{x_2}(t) = -A_{11}\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{x_2}(0) = 0 \Rightarrow -A_{11}\omega_1 \sin\varphi_1 + A_{12}\omega_2 \sin\varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{11}cos\varphi_1 + A_{12}cos\varphi_2 = x_0 & (1) \\ A_{11}cos\varphi_1 - A_{12}cos\varphi_2 = 0 & (2) \\ -A_{11}\omega_1 \sin\varphi_1 - A_{12}\omega_2 \sin\varphi_2 = 0 & (3) \\ -A_{11}\omega_1 \sin\varphi_1 + A_{12}\omega_2 \sin\varphi_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(2) + (4) \Rightarrow \ \sin\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = k\pi$

$(4) - (2) \Longrightarrow \ sin\varphi_2 = 0 \Longrightarrow \varphi_2 = k\pi$

Si $k = 0 \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow A_{11} + A_{12} = x_0 \\ (2) \Rightarrow A_{11} - A_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} = \frac{x_0}{2} \\ A_{12} = \frac{x_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2}[cos\omega_1 t + cos\omega_2 t] \\ x_1(t) = \frac{x_0}{2}[cos\omega_1 t - cos\omega_2 t] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \\ x_2(t) = x_0 \sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \end{cases}$$

Exercice n°02 :

On considère le système représenté par la figure 2 constitué de deux oscillateurs verticaux (***m₁, k***) et (***m₂, k***) couplés par un amortisseur ***α***.

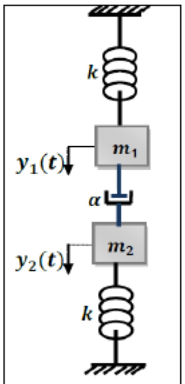

Figure 2

3. Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des variables ***$y_1(t)$*** et ***$y_2(t)$***.

- L'énergie cinétique du système : $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^{\,2}}$
- L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U = \frac{1}{2}ky_1^{\,2} + \frac{1}{2}ky_2^{\,2}}$
- La fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2}$
- La fonction de Lagrange : $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^{\,2} - \frac{1}{2}ky_1^{\,2} - \frac{1}{2}ky_2^{\,2}}$
- Le formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_2}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + ky_1 = \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \\ m_1\ddot{y}_2 + ky_2 = \alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + ky_1 = \alpha\dot{y}_2 \\ m_1\ddot{y}_2 + \alpha\dot{y}_2 + ky_2 = \alpha\dot{y}_1 \end{cases}$$

4. Condition : ***m_1=m_2=m***.

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + ky_1 = \alpha\dot{y}_2 \ldots\ldots\ldots(1) \\ m\ddot{y}_2 + \alpha\dot{y}_2 + ky_2 = \alpha\dot{y}_1 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + \alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + 2\alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = 0 \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + \alpha(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = \alpha(\dot{y}_2 + \dot{y}_1)$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = 0 \ldots\ldots\ldots(4)$$

On pose : $Y_2 = y_2 + y_1, Y_1 = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{Y}_1 + 2\alpha\dot{Y}_1 + kY_1 = 0 \\ m\ddot{Y}_2 + kY_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{Y}_1 + \frac{2\alpha}{m}\dot{Y}_1 + \frac{k}{m}Y_1 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \frac{k}{m}Y_2 = 0 \end{cases}$