Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
$1^{\text{ère}}$ année Licence.

Octobre 2022

Série de TD n°1 d'algèbre 1

Exercice 1. Écrire les négations des assertions suivantes où P, Q, R sont des propositions

1. $P \Rightarrow Q$
2. $P \bigvee (Q \bigvee R)$
3. $P \bigwedge (Q \bigwedge R)$
4. $P \bigwedge \neg Q$

Exercice 2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

1- $(2+3 = 5) \wedge (1+2 = 4)$;
2- $(2+3=5) \vee (1+2=4)$;
3- $(2+3 = 5) \wedge (2+4 = 8)$;
4- $(2+3=5) \wedge (2+4=6)$;
5- $\exists x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y > 0$;
6- $\exists x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$;
7- $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y > 0$;
8- $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y > 0$.

Exercice 3.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

b. Montrer que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas sous la forme de $\dfrac{p}{q}$ (avec : $q \neq 0$, p et q sont premiers entre eux).

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel k tel que $n^2+1 = k^2$.

d. Soient $a, b \geq 0$. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$

Exercice 4.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer par récurrence que : $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 17 divise $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11 ;
5. $\cos n\pi = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

Université A/Mira - Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département d'informatique
1ère année licence.

Corrigé de la série N°01 d'Algèbre I

Exercice n°01

1) $\overline{P \Rightarrow Q}$? Il est clair que $P \Rightarrow Q \overset{\text{équivalent logiquement à}}{\Longleftrightarrow} \overline{P} \vee Q$
voir le tableau suivant

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Donc $\overline{P \Rightarrow Q} = \overline{\overline{P} \vee Q} = \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} = P \wedge \overline{Q}$

2) $\overline{P \wedge \overline{Q}} = \overline{P} \vee \overline{\overline{Q}} = \overline{P} \vee Q$

3) $\overline{P \vee (Q \vee R)} = \overline{P} \wedge \overline{(Q \vee R)} = \overline{P} \wedge (\overline{Q} \wedge \overline{R})$

4) $\overline{P \wedge (Q \wedge R)} = \overline{P} \vee \overline{(Q \wedge R)} = \overline{P} \vee (\overline{Q} \vee \overline{R})$

Exercice n°2

1) $(2+3=5) \wedge (1+2=4)$ est fausse, sa négation est

$(2+3\neq 5) \vee (1+2\neq 4)$

2) $(2+3=5) \vee (1+2=4)$ est vraie, sa négation est

$(2+3\neq 5) \wedge (1+2\neq 4)$

3) $(2+3=5) \wedge (2+4=8)$ est fausse, sa négation est

$(2+3\neq 5) \vee (2+4\neq 8)$

4) $(2+3=5) \wedge (2+4=6)$ est vraie, sa négation est

$(2+3\neq 5) \vee (2+4\neq 6)$

5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a $x+y>0$ est fausse

$\forall x \in \mathbb{R}$, alors on peut prendre $y=-(x+\alpha)$ avec $\alpha \geq 0$, alors

$x+y = x+(-x-\alpha) = -\alpha \leq 0$.

Sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$

Dans ce cas on prend $y=-x-\alpha$ avec $\alpha \geq 0$

6) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a $y^2 > x$ est vraie il suffit de prendre x négatif. Sa négation est :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \leq x$.

7) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x+y>0$ est vraie, il suffit de prendre $y=-x+\alpha$ avec $\alpha>0$. Sa négation est

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a $x+y \leq 0$.

8) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a $x+y>0$ est fausse si $x<0, y<0$

$x+y<0$

Sa négation est

$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x+y \leq 0$

Exercice n° 03

a) Montrons par la $\boxed{\text{contraposée}}$ que si n^2 est pair, alors n est pair (n^2 pair $\Rightarrow n$ pair)

La contraposée est : n : impair $\Rightarrow n^2$: impair

Supposons que n est impair, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$; $\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2\left[2k^2 + k\right] + 1$. Il est clair que $2k^2 + k \in \mathbb{N}$ car $k \in \mathbb{N}$, donc si on pose $k' = 2k^2 + k \in \mathbb{N}$, on trouve

$n^2 = 2k' + 1$ donc n^2 est impair,

alors par la contraposée on a :

$$\boxed{\text{Si } n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair.}}$$

b) Montrons par l'absurde que $\sqrt{2} \neq P/\varphi$
(avec P et q sont premiers entre eux).
on dit que P et φ sont premiers entre eux
si on ne peut pas simplifier la fraction
$\boxed{P/\varphi}$. Exemple $\boxed{2 \text{ et } 3}$ sont premiers entre
eux par contre 4 et 6 ne sont pas premiers
entre eux car $4/6$ peut être simplifié
(ie) $\boxed{4/6 = 2/3}$.
Pour la démonstration on suppose le contraire
c'est-à-dire $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel
alors $\sqrt{2} = P/\varphi \Rightarrow \sqrt{2}\,\varphi = P \Rightarrow 2\varphi^2 = P^2$
alors P^2 est pair, donc P est pair c'est à dire
$P = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, or $2\varphi^2 = P^2 \Rightarrow$
$2\varphi^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2\varphi^2 = 4k^2 \Rightarrow \varphi^2 = 2k^2$
donc φ^2 est pair et par définition φ est pair.
Par conséquent, il est possible de simplifier la
fraction P/φ par 2, ce qui contredit l'hypothèse
que P et φ sont premiers entre eux, donc
$\sqrt{2}$ est irrationnel c'est-à-dire $\sqrt{2} \neq P/\varphi$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier naturel k tel que $n^2+1=k^2$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N} \,/\, n^2+1=k^2$, alors

$$k^2-n^2=1 \Rightarrow (k-n)(k+n)=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k-n=1 \longrightarrow (1) \\ k+n=1 \longrightarrow (2) \end{cases} \quad \text{car } k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$$

donc (2) - (1) donne $(k+n)-(k-n)=0$

$\Rightarrow 2n=0 \Rightarrow n=0$, contradiction car $n \in \mathbb{N}^*$,

donc par l'absurde $\nexists\, k \in \mathbb{N} \,/\, n^2+1=k^2$.

d) Soient $a, b \geq 0$, montrons par l'absurde que

si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a=b$.

on a $\overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$, avec

P est $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et Q est $a=b$.

supposons que le contraire est vraie

c'est-à-dire $\underbrace{\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}}_{P} \wedge \underbrace{a \neq b}_{\overline{Q}}$ est vra donc $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a(1+a) = b(1+b)$

$\Rightarrow a + a^2 = b + b^2 \Rightarrow a - b = b^2 - a^2$

$= a - b = -(b-a) = (b-a)(b+a)$

$\Rightarrow (b-a)[(a+b)+1] = 0$

$\Rightarrow b - a = 0$ car $a+b+1 > 0$

puis comme information de départ $\boxed{a, b \geq 0}$

donc contradiction avec le fait que $a \neq b$, alors par l'absurde on a.

$$\boxed{\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b}.$$

Exercice n° 4 :

1) Montrons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow (P)$

Pour $n = 1$, on a $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1$,

alors la propriété est vérifiée pour $n = 1$

supposons que (P) est vérifiée à l'ordre n^e

c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. puis Montrons

que (P) est vraie à l'ordre $(n+1)$.

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Comme $\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+3+\dots+n+(n+1)$

$= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$, or d'après la récurrence

on a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

maintenant on va décomposer $\boxed{n^2+3n+2}$

$\Delta = 9 - 4(1)(2) = 9-8 = 1 > 0$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-1}{2} = -2$

alors

$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{2} = -1$

$n^2+3n+2 = (n-(-1))(n-(-2)) = (n+1)(n+2)$

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie, alors

par récurrence $\forall n \geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111

on note cette propriété par $\boxed{P(n)}$.

∠ si $n=0$, on a $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 = 10^2 + 10 + 1$

$= 100 + 10 + 1 = \boxed{111}$, donc $111 = 1 \times 111$,

alors 111 est divisible par 111.

c'est-à-dire $\exists k \in 1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{111 = 111k}$

∠ Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $P(n)$ est vraie

(ie) $\exists k \in \mathbb{Z} \mid 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 = k \cdot 111$

et montrons par la suite que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\exists k'' \in \mathbb{Z}$ tel que

$10^{6(n+1)+2} + 10^{3(n+1)+1} + 1 = 111 \cdot k''$

on a $10^{6(n+1)+2} + 10^{3(n+1)+1} + 1 =$

$10^{6n+2+6} + 10^{3n+1+3} + 1$

$= \boxed{10^{6n+2} \cdot (10^3)^2 + 10^{3n+1} \cdot 10^3 + 1}$ ~~**~~

or $10^3 = 1000 = 9 \times 111 + 1$

Donc $(1000)^2 = (10^3)^2 = (9 \times 111 + 1)^2$

$= 9^2 \cdot (111)^2 + 2 \times 9 \times 111 + 1 = 111(9^2 \cdot 111 + 18) + 1$

La relation ~~devient~~ à

$10^{6n+2} \cdot [111(9^2 \times 111 + 18) + 1] +$

$10^{3n+1} \cdot (9 \times 111 + 1) + 1$

$= \underbrace{10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1} + 111[10^{6n+2}(9^2 \times 111 + 18)]$

$+ 111[9 \times 111]$

$= k \cdot 111 + 111[10^{6n+2}(9^2 \times 111 + 18) + 10^{3n+1} \times 9 \times 111]$

hypothèse de récurrence

Comme $10^{6n+2}(9^2 \times 111 + 18) + 10^{3n+1} \cdot 9 \times 111) \in \mathbb{Z}$

alors si on prend $(9^2 \times 111 + 18)10^{6n+2} + 9 \times 111 \times 10^{3n+1}) = k'$

avec $k' \in \mathbb{Z}$, on trouve que

$P(n+1) = k \cdot 111 + k' \cdot 111 = (k + k') \cdot 111$

alors $\exists k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$ tel que $P(n+1) = k'' \cdot 111$

Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$P(n)$ est vraie.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 17 divise $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ $*$

la propriété $*$ est vraie pour $n = 1$ car

$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17 = 17 \cdot 1$

$\left(\left(\exists k \in \mathbb{Z},\ k = 1\right) / \ 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 \cdot k\right)$.

Supposons que $*$ est vraie à l'ordre n

c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{Z} / 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$]

et montrons qu'il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que

$3 \times 5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} = 17 \cdot k'$

on a $3 \times 5^{2(n-1)-1} + 2^{3(n+1)-2}$

$= 3 \times 5^{2n-1+2} + 2^{3n-2+3}$

$= 3 \times 5^{2n-1} \times 5^{2} + 2^{3n-2} \cdot 2^{3}$

$= 3 \times 5^{2n-1} \times 25 + 2^{3n-2} \cdot 8$ (on remplace 25 par $\underline{17+8}$

$= 3 \times 5^{2n-1}(17+8) + 2^{3n-2} \cdot 8$

$= 8\underbrace{\left[3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right]}_{k \cdot 17} + 17 \times 3 \times 5^{2n-1}$

$= 17\left(8 \cdot k + 3 \times 5^{2n-1}\right) = 17 \cdot k'$

avec $k' = 8k + 3 \times 5^{2n-1} \in \mathbb{Z}$

Donc par récurrence on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11

c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{Z} / 10^n - (-1)^n = 11k$ *

* est vraie pour $n = 0$ car $1 - 1 = 0 = 11 \cdot 0$

hypothèse de récurrence. Supposons que * est vraie à l'ordre n (re) $\exists k \in \mathbb{Z} / 10^n - (-1)^n = 11k$

et Montrons que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \cdot k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

on a $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 10 \times 10^n - (-1)^n \times (-1)$

$= 10 \times 10^n + (-1)^n = 11 \times 10^n - 10^n + (-1)^n$

$= 11 \times 10^n - \underbrace{(10^n - (-1)^n)}_{\text{hypothèse de récurrence}} = 11(10^n - 11k)$

$= 11(10^n - k) = 11 \times k'$ avec $\boxed{k' = 10^n - k \in \mathbb{Z}}$

Donc par ~~recurr~~ récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$:

$10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

5) $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ *

* est vraie pour $n = 1$ car :

$\cos(\pi) = -1 = (-1)^1$.

hypothèse de récurrence

supposons que * est vraie à l'ordre n

c'est-à-dire $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

alors $\cos((n+1)\pi) = \cos(n\pi + \pi)$

comme $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

alors $\cos(n\pi + \pi) = \cos n\pi . \cos \pi - \sin n\pi . \underbrace{\sin \pi}_{0}$

donc $\cos((n+1)\pi) = -\underbrace{[\cos n\pi]}_{\text{hypothèse de récurrence} \,=\, (-1)^n}$

alors $\cos((n+1)\pi) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, alors

par récurrence on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de d'Informatique
1ère année Licence. Octobre 2022

Série de TD n°2 d'Algèbre 01

Exercice 1. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :
1) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$, **2)** $C_E^{(C_E^A)} = A$, **3)** $C_E^{(A\cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$,
4) $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$, **5)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
6) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, **7)** $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$.

Exercice 2.

1. Soit $F = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.
   i) Peut-on écrire : $a \in F$, $a \subset F$, $\{b\} \in F$, $\{b\} \subset F$, $\emptyset \in F$, $\{\emptyset\}$, $\emptyset \subset F$.
   ii) Décrire l'ensemble des parties de F.
   iii) Donner une partition de F.
2. Soit A=$B = \{1, 2\}$. Écrire le produit cartésien $A \times B$, quel est le nombre de parties de $A \times B$.
3. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2 / i < j\}$,
   $B = \{(i, j) \in E^2 / i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2 / i > j\}$
   a. Représenter A, B et C par un dessin.
   b. Montrer que A, B et C forment une partition de E^2.

Exercice 3.
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$ par son graphe
$G = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$.
a. Dessiner le graphe représentatif de $\mathcal{R}$,
b. $\mathcal{R}$ est-elle reflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{Z}$, la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ est pair.}$$

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
b. Déterminer les classes d'équivalence de 0 et 1.
c. Donner l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice 5. On définit sur $]1, +\infty[$, la relation $\mathcal{S}$ par

$$\forall x, y \in]1, +\infty[: x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \frac{x}{1 + x^2} \geq \frac{y}{1 + y^2}.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $]1, +\infty[$. Cet ordre est-il total ?

Exercice 6. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$. Montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 7. Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2 + x - 2.$$

a. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.

b. L'application f est-elle bijective ?

c. Calculer $f([-1 \quad 1])$ et $f^{-1}([-2 \quad 4])$.

Exercice 8. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{f} : \mathbb{R} - \{-\tfrac{3}{2}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2 - \frac{8-x}{4x+6}. \end{aligned}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Quelle restriction doit-on faire pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas donner l'application réciproque de f.

Université A/Mira de Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département d'informatique
1ère année licence

Octobre 2022

Corrigé de la série N° 02 d'algèbre 01
(Ensembles, relations, applications)

Exercice n° 01

1) $A \subset B \iff C_E^B \subset C_E^A$

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

soit $x \in C_E^B \Rightarrow (x \in E \text{ et } x \notin B) \Rightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$

car $A \subset B$, donc on obtient $(x \in E \text{ et } x \notin A)$

$\Rightarrow x \in C_E^A$, d'où alors $\boxed{C_E^B \subset C_E^A}$

b) $C_E^B \subset C_E^A \Rightarrow A \subset B$

soit $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B$

car $C_E^B \subset C_E^A$, donc on obtient $x \notin \overline{B} \Rightarrow$

$x \in B$, d'où alors $\boxed{A \subset B}$. a et b montrent

que $\boxed{A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}}$

2) $\overline{\overline{A}} = A$ $\left(C_E^{C_E^A} = A\right)$. soit $x \in C_E^{C_E^A} \overset{\text{déf}}{\iff} x \in E \text{ et } x \notin \overline{A}$

$\iff x \in E \text{ et } x \in A \iff x \in A$.

3) $C_E^{(A\cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$.

a) $C_E^{A\cup B} \subset C_E^A \cap C_E^B$

Soit $x \in C_E^{(A\cup B)} \Rightarrow x \in E$ et $x \notin A\cup B$

$\Rightarrow x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B$

$\Rightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow \boxed{x \in C_E^A \cap C_E^B}$

d'où alors $\boxed{C_E^{A\cup B} \subset C_E^A \cap C_E^B}$

b) $C_E^A \cap C_E^B \subset C_E^{(A\cup B)}$

Soit $x \in C_E^A \cap C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow$

$x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \notin A\cup B \Rightarrow \boxed{x \in C_E^{A\cup B}}$

d'où alors $\boxed{C_E^A \cap C_E^B \subset C_E^{A\cup B}}$, a et b montrent

que $\boxed{C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B}$.

4) $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

~~autre~~ $\cancel{C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B}$.

Soit $x \in C_E^{A\cap B} \Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A\cap B$.

$\Leftrightarrow (x \in E$ et $x \notin A)$ ou $(x \in E$ et $x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in C_E^A$ ou $x \in C_E^B$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in C_E^A \cup C_E^B}$. Donc $\boxed{C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B}$

5) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

a) $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Soit $x\in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ et $x\in(B\cup C)$

Cas 1 : si $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$, donc en utilisant cette remarque « soit $A\subset E$. si $x\in A$ il est clair que $x\in A\cup \boxed{\text{n'importe quel ensemble}}$ et si $x\notin A$, il est clair que $x\notin A\cap\boxed{\text{n'importe quel ensemble}}$

pour le Cas 1

$x\in A\cap B\cup \boxed{\text{Ensemble qlcq}}$ (on peut prendre donc comme ensemble qlcq $\boxed{A\cap C}$)

et on obtient $\boxed{x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

Cas 2 : si $x\in C \Rightarrow \boxed{x\in A\cap C}$, dans ce cas si on prend comme ensemble quelconque $\boxed{A\cap B}$, on trouve $\boxed{x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}$. Donc pour les deux cas on a : $\boxed{A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

b) $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$

soit $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow \boxed{x\in A\cap B}$ ou $\boxed{x\in A\cap C}$

1^{er} cas

si $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in B \cup \underbrace{\boxed{\text{ensemble qlcq}}}_{C}$

prendre cet ensemble qlcq = C

donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$

$\Rightarrow \boxed{x \in A \cap (B \cup C)}$

$2^{ème}$ cas si $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in \boxed{\text{ensemble qlcq}} \cup C$

si on prend comme ensemble quelconque B

on obtient

$x \in A$ et $x \in B \cup C \Rightarrow \boxed{x \in A \cap (B \cup C)}$

Donc a et b montrent que

$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

6) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

a) $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$

soit $n, m \in (A \cup B) \times C \Rightarrow n \in A \cup B$ et $m \in C$

Cas 1 : si $n \in A \Rightarrow (n, m) \in A \times C$

$\Rightarrow (n, m) \in A \times C \cup \boxed{\text{Ensemble qlcq } (P \times P)}$

on peut prendre comme ensemble qlcq $\boxed{B \times C}$, alors

on trouve $\boxed{(n, m) \in A \times C \cup B \times C}$.

Cas 2 si $n \in B \Rightarrow (n, m) \in B \times C$

$\Rightarrow (n \times m) \in \boxed{\text{ensemble qlcq}} \cup B \times C$

on prend comme ensemble quelconque $A \times C$

donc on trouve $\boxed{(n, m) \in (A \times C) \cup (B \times C)}$

Dans les deux cas on a $\boxed{(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)}$

b) $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$

Soit $(n, m) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

Cas 1 : si $(n, m) \in A \times C \Rightarrow n \in A$ et $m \in C$

$\Rightarrow n \in A \cup \underbrace{\boxed{\text{ensemble qlcq}}}_{= B}$ et $m \in C$

$\Rightarrow n \in A \cup B$ et $m \in C \Rightarrow \boxed{(n, m) \in (A \cup B) \times C}$

Cas 2 : si $(n, m) \in B \times C \Rightarrow n \in B$ et $m \in C$

$\Rightarrow n \in \underbrace{\boxed{\text{ensemble qlcq}}}_{= A} \cup B$ et $m \in C$

$\Rightarrow n \in A \cup B$ et $m \in C$

$\Rightarrow \boxed{n \in (A \cup B) \times C}$

Dans les deux cas on $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$

(a) et (b) montrent que $\boxed{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup B \times C}$

7) $A \cap (B-C) = (A \cap B) \cap (A-C)$

a) $A \cap (B-C) \subset (A \cap B) \cap (A-C)$

Soit $x \in A \cap (B-C) \Rightarrow x \in A$ et $x \in B-C$

$\Rightarrow x \in A$, $x \in B$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ et $x \in A-C$

$\Rightarrow \boxed{x \in (A \cap B) \cap (A-C)}$

b) $(A \cap B) \cap (A-C) \subset A \cap (B-C)$

Soit $x \in (A \cap B) \cap (A-C) \Rightarrow$

$x \in (A \cap B)$ et $x \in (A-C)$

$\Rightarrow x \in A$, $x \in B$ et $x \notin C$

$= x \in A$ et $x \in B-C$

$\Rightarrow \boxed{x \in A \cap (B-C)}$

a et b montrent que

$$\boxed{A \cap (B-C) = (A \cap B) \cap (A-C)}$$

Exercice n°02

1) $F = \{a, b, c, d\}$

I) $a \in F$ (oui) , $a \subset F$ (non), $\{b\} \in F$ (non)

$\{b\} \subset F$ (oui), $\phi \in F$ (non), $\{\phi\}$ (non)

$\phi \subset F$ (oui)

II) $\mathcal{P}(F) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}$

$\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d$

$\{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

III) Comme partition de F on peut prendre

1) $\{\{a\}, \{b,c,d\}\}$

2) $\{\{a\}, \{b\}, \{c,d\}\}$

3) $\{\{a,b\}, \{c,d\}\}$ etc

2) $A = B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

3) $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

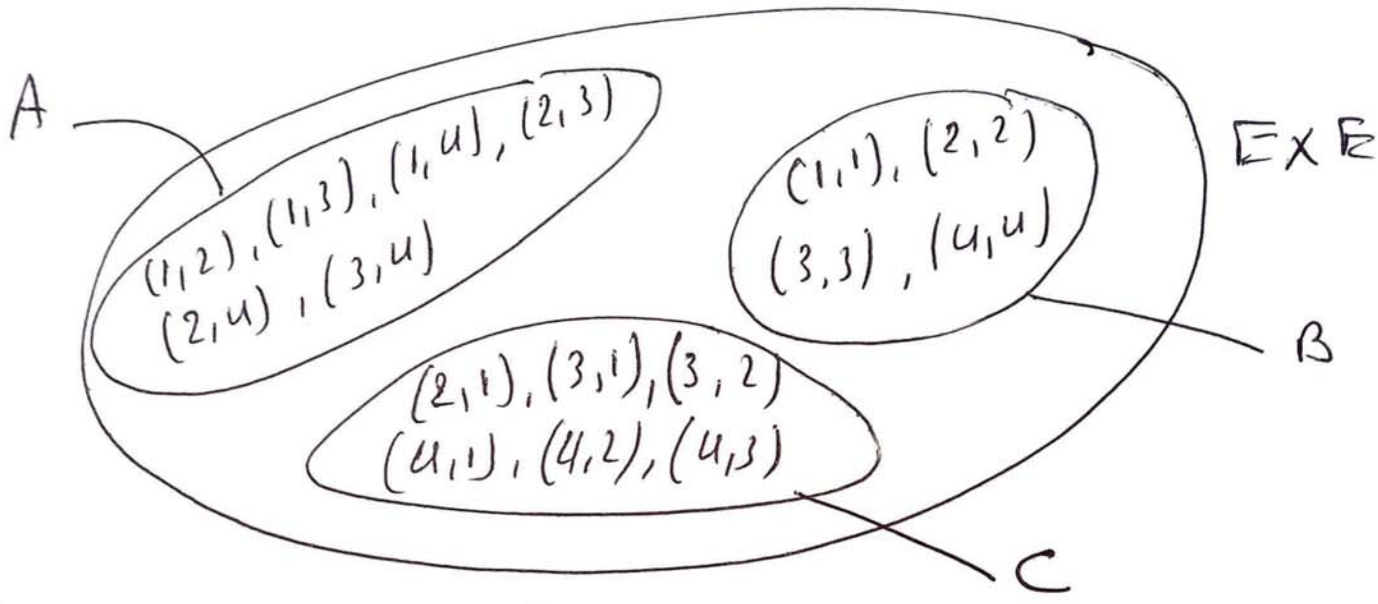
$$E^2 = E \times E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$$
$$(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)$$
$$(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)$$
$$(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\}$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$C = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

a) Représentation de A, B et C par un dessin



b) on a $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ et

$A \cup B \cup C = E \times E$ donc

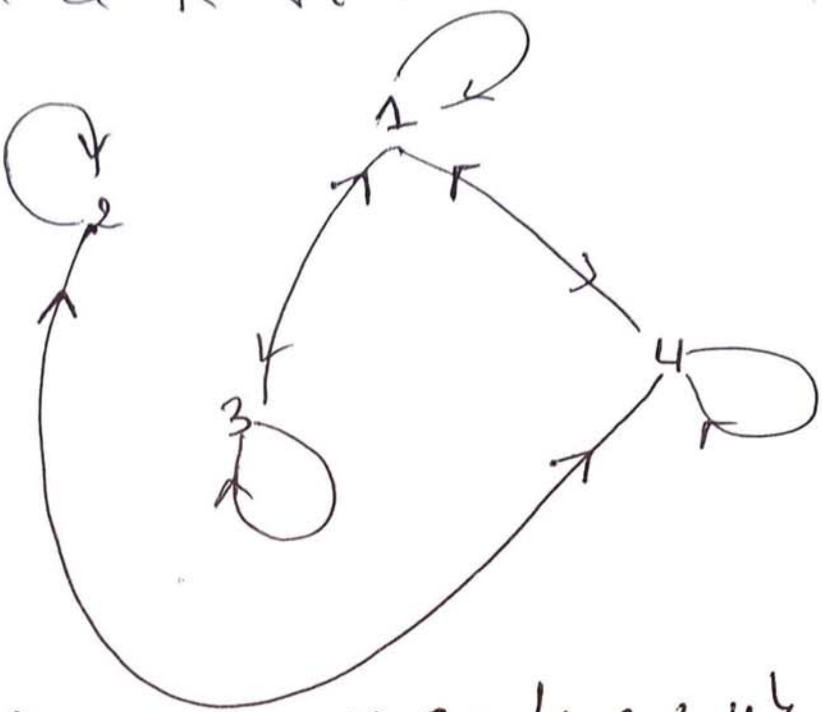
A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice n° 03

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et G le graphe associé à la relation binaire définie dans R.

avec $G = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$.

a) Le graphe de R est :



b) R est reflexive car $\forall a \in \{1,2,3,4\}$ on a $\boxed{aRa}$.

R est symétrique car :

$1R3 \Leftrightarrow 3R1$, $1R4 \Leftrightarrow 4R1$

et $2R4 \Leftrightarrow 4R2$.

R n'est pas antisymetrique

R n'est pas transitive car

$1R4$ et $4R1$ mais $1 \not R 2$

Exercice n° 04

$\forall x, y \in \mathbb{Z}: x R y \iff x+y$ est pair

a)

i) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x + x = 2x$ est pair donc $x R x$ donc R est reflexive

ii) Soit $x, y \in \mathbb{Z} / x R y \iff x+y$ est pair $\iff y+x$ est pair, $\iff y R x$, donc R est symétrique

iii) Soit $x, y, z \in \mathbb{Z} / x R y$ et $y R z$

$\iff \begin{cases} x+y \text{ est pair } ① \\ y+z \text{ est pair } ② \end{cases}$

① + ② $\Rightarrow x + 2y + z$ est pair $\Rightarrow 2y + (x+z)$ est pair $\Rightarrow$ $x+z$ est pair $\Rightarrow x R z$

donc R est transitive

Comme R est reflexive, symétrique et transitive, alors R est une relation d'équivalence

10

Exercice n°04

Sur $\mathbb{Z}$ on considère la relation R définie par :

$$x R y \Longleftrightarrow x + y \text{ est pair}$$

on peut écrire

$$x R y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, x + y = 2k$$

a/

i) Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a $x + x = 2x \Rightarrow \exists k = x \in \mathbb{Z}$ tel que $x + x = 2k \Rightarrow x R x$, donc R est reflexive

~~ii) Soit x~~

ii/ Soient $x, y \in \mathbb{Z} \,/\, x R y$, alors $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, x + y = 2k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, y + x = 2k$ $\Rightarrow y R x$, donc R est symétrique

iii/ Soient $x, y, z \in \mathbb{Z} \,/\, x R y$ et $y R z \Rightarrow$

$$\begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z} \,/\, x + y = 2k_2 \text{ ①} \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} \,/\, y + z = 2k_2 \text{ ②} \end{cases} \Rightarrow \text{par ①+②}$$

$$x + y + y + z = 2k_1 + 2k_2$$

$$\Rightarrow x + z = 2k_1 + 2k_2 - 2y$$

$$\Rightarrow x + z = 2(k_1 + k_2 - y)$$

$$\Rightarrow \exists k_3 = (k_1 + k_2 - y) \in \mathbb{Z} \,/\, x + y = 2k_3$$

donc R est transitive.

Comme R est reflexive, symetrique et transitive, alors R est une relation d'equivalence

b) $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} / x R 0\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\}$
$= \{2k / k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$.

$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x R 1\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} / x + 1 = 2k\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} / x = 2k - 1\}$
$= \{2k-1 / k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\mathbb{Z}/R$ on a $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\}$
$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-1\}$

$\overline{2} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 2 = 2(k-1)\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' = k-1 \in \mathbb{Z} : x = 2k'\} = \overline{0}$

$\overline{-2} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 2 = 2(k+1)\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' = k+1 \in \mathbb{Z} : x = 2k'\} = \overline{0}$

$\overline{3} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x + 3 = 2k\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 3 = 2k - 2 - 1\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k-1) - 1\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' = k - 1 \in \mathbb{Z} : x = 2k' - 1\} = \overline{1}$

$\overline{-1} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x - 1 = 2k\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} ; x = 2k + 1 = 2k + 2 - 1\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} ; x = 2(k+1) - 1\}$
$= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' = k + 1 \in \mathbb{Z} : x = 2k' - 1\} = \overline{1}$

on peut remarque que tous les éléments en relation avec 0 sont pairs et que tous les éléments en relation avec 1 sont impairs donc

$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}\}$.

Exercice n° 05 Suite (Corrigé de la serie N° 02)

$\forall x, y \in]1, +\infty[: x R y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$

Montrons que R est une relation d'ordre

a) $\forall x \in]1, +\infty[$, on a $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$, alors

$x R x$, donc R est réflexive.

b) Soient $x, y \in]1, +\infty[\,/\, x R y$ et $y R x$, alors

$$\begin{cases} \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2} \\ \frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+y^2) \geq (1+x^2)\, y \\ y(1+x^2) \geq (1+y^2)\, x \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} x + xy^2 \geq y + x^2 y \\ y + yx^2 \geq x + y^2 x \end{cases}$$

$\Rightarrow x + xy^2 \leq y + x^2 y \leq x + xy^2$

$\Rightarrow \boxed{x = y}$, donc R est antisymétrique

RQ : Dans ce cas on peut aussi résoudre

l'equation $y + x^2 y = x + xy^2$ donc

$x^2 y - x(1+y^2) + y = 0 \quad \Delta = (1+y^2)^2 - 4y \cdot y$

$\Delta = (y-1)^2 (y+1)^2 > 0$ car $y \in]1, +\infty[$

Puis on trouve deux solutions et on va retenir seulement celle qui appartient à $]1, +\infty[$, donc $\boxed{x = y}$, la solution à éliminer est $x = 1/y \notin]1, +\infty[$

c) Soient $x, y, z \in]1, +\infty[$ |

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} \geq \dfrac{y}{1+y^2} \\ \dfrac{y}{1+y^2} \geq \dfrac{z}{1+z^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$$

car les quantités sont positives, alors xRz, donc R est transitive.

Comme R est reflexive, antisymétrique et transitive, alors R est une relation d'ordre

2) On a $\forall x, y \in]1, +\infty[$: xRy ou bien yRx

c'est-à-dire $\dfrac{x}{1+x^2} \geq \dfrac{y}{1+y^2}$ ou bien $\dfrac{y}{1+y^2} \geq \dfrac{x}{1+x^2}$

donc $\forall x, y \in]1, +\infty[$: x et y sont comparables, alors l'ordre est total.

Exercice n° 06

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ $\left(\begin{array}{l} \text{par définition :} \\ f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \end{array} \right)$

Soit $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \mid y = f(x)$. Comme $A \subset B$, alors $x \in B$, donc $y = f(x) \mid x \in B \Rightarrow \boxed{y \in f(B)}$, alors

$\boxed{f(A) \subset f(B)}$

2) $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

a) Montrons que $f(A\cup B) \subset f(A)\cup f(B)$

Soit $y \in f(A\cup B) \Rightarrow \exists x \in A\cup B \,/\, y = f(x)$

on distingue deux Cas :

<u>Cas 1</u> : $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup$ [Ensemble qlcq]

donc $\boxed{f(A) \subset f(A)\cup f(B)}$

Cas 2 : $x \in B \Rightarrow y = f(x) \in f(B) \subset f(B) \cup$ [Ensemble qlcq]

$\Rightarrow y \in f(A)\cup f(B)$

~~...~~ considéré [Ensemble qlcq]

[comme étant l'ensemble qlcq]

Donc Dans les deux Cas $\boxed{f(A\cup B) \subset f(A)\cup f(B)}$

b) Montrons que $f(A)\cup f(B) \subset f(A\cup B)$

Soit $y \in f(A)\cup f(B)$, on distingue deux Cas :

<u>Cas 1</u> : si $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \,/\, y = f(x)$

Comme $A \subset A\cup B$, alors $x \in A\cup B \,/\, y = f(x) \Rightarrow$

$y \in f(A\cup B)$

Cas 2 : si $y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \,/\, y = f(x)$

Comme $B \subset A\cup B$, alors $x \in A\cup B \,/\, y = f(x) \Rightarrow$

$y \in f(A\cup B)$. Donc dans les deux cas

$f(A)\cup f(B) \subset f(A\cup B)$. a et b montrent

que $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

3) $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$

Soit $y\in f(A\cap B) \Rightarrow \exists x\in A\cap B \,/\, y=f(x)$

$\Rightarrow \{\exists x\in A \,/\, y=f(x)\}$ et $(\exists x\in B \,/\, y=f(x))$

$\Rightarrow y\in f(A)$ et $y\in f(B) \Rightarrow \boxed{y\in f(A)\cap f(B)}$

Rq: L'exemple suivant montre que en général

$f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$

Si $E=\{1,2\}$, $F=\{a\}$ avec $f(1)=f(2)=a$

si on prend $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ on a

$\begin{cases} f(A\cap B)=f(\phi)=\phi \\ f(A)\cap f(B)=f(1)\cap f(2)=\{1\} \end{cases}$

Comme $\boxed{\phi\neq\{1\}}$, alors $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$

4) Montrons que $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

par définition $f^{-1}(C)=\{x\in E \,/\, f(x)\in C\}$

Montrons que $f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

a) Montrons que $f^{-1}(C\cap D)\subset$ ... $f(x)\in C\cap D$ donc

Soit $x\in f^{-1}(C\cap D) \Rightarrow f(x)\in C\cap D$ donc

$f(x)\in C$ et $f(x)\in D \Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ et $x\in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow \boxed{x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)}$.

b) Montrons que $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cap D)$

Soit $x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D) \Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ et $x\in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x)\in C$ et $f(x)\in D \Rightarrow f(x)\in C\cap D$

$\Rightarrow \boxed{x\in f^{-1}(C\cap D)}$. De a et b, on a

$$\boxed{f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)}$$

Exercice n° 07 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2 + x - 2$

a) $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{4\}\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 4\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 4\}$
$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \quad \Delta = 1 + 24 = 25 > 0$
$\Rightarrow x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$, alors
$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3}$
$f^{-1}(\{4\}) = \{-3, 2\}$

b) f n'est pas injective car $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$x_1 = -3,\ x_2 = 2 \mid f(x_1) = f(x_2)$, mais $x_1 \neq x_2$
c'est-à-dire $f(-3) = f(2) = 4$, mais $\boxed{-3 \neq 2}$.
comme f n'est pas injective, donc elle n'est pas bijective.

Rq: Dans ce cas on peut voir est ce que f est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$, $\overset{?}{\exists} x \in \mathbb{R} \mid y = f(x)$
$\Rightarrow x^2 + x - 2 = y \Rightarrow x^2 + x - (2+y) = 0$
$\Delta = 1 - 4[-(2+y)] = 9 + 4y$
Si $\Delta < 0$ pas de solution, donc si $y < -9/4$
$f(x) = y$ n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective

c) $f([-1,1]) = \{ f(x) / \quad x \in [-1,1] \}$

$= \{ f(x) \mid \quad -1 \le x \le 1 \}$

Rq: si f est croissante $\nearrow$ ou est decroissante $\searrow$ nous allons donner directement $[f(-1)\ f(1)]$ ou $[f(1), f(-1)]$, si non on doit voir le tableau de variation de f, alors

$f'(x) = [x^2 + x - 2]' = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4} =$

$\boxed{-\frac{9}{4}}$. le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{-2}$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$+\infty$

Min f dans $[-1\ 1]$ est $-\frac{9}{4}$, donc

$f([-1,1]) = [-\frac{9}{4}\ \ 0]$ car f est decroissante sur $[-1\ -\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{1}{2}\ 1]$

d) $f^{-1}([-2,4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2,4]\}$

$\Rightarrow \quad -2 \leq x^2 + x - 2 \leq 4$

<u>Cas 1</u> $\Rightarrow \quad x^2 + x - 2 \geq -2 \Rightarrow$

$x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(x+1) \geq 0$, alors par le tableau suivant on trouve :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[}$

<u>Cas 2</u> $\quad x^2 + x - 2 \leq 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 \leq 0$

$\Delta = 1 - 4(-6) = 25$, $x_1 = \frac{-1+5}{2} = \boxed{2}$, $x_2 = \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3}$

alors on a le tableau suivant

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2) \times (x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [-3 \;\; 2]$

donc <u>Cas 1</u> et <u>Cas 2</u> montrent que

$x \in [-3, -1] \cup [0 \;\; 2] = f^{-1}([-2,4])$

(ie) $(]-\infty \; -1] \cup [0 \; +\infty[) \cap ([-3 \;\; 2])$.

Exercice n° 08

a) Injectivité $f: \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = 2 - \frac{8-x}{4x+6}$$

~~Soit~~ Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-3/2\}$ tels que

$f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 2 - \frac{(8-x_1)}{4x_1+6} = 2 - \frac{(8-x_2)}{4x_2+6}$$

$$\Rightarrow (8-x_1)(4x_2+6) = (4x_1+6)(8-x_2)$$

$$= \cancel{32x_1} + \cancel{48} - 6x_1 - \cancel{4x_1x_2}$$

$$= \cancel{32x_1} + \cancel{48} - 6x_2 - \cancel{4x_1x_2} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Donc f est injective.

b) Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{R}$

$\exists x \in \mathbb{R} - \{-3/2\} \mid y = f(x)$?

$$\Rightarrow y = 2 - \frac{8-x}{4x+6} \Rightarrow$$

$$y - 2 = -\frac{+8-x}{4x+6}$$

$$\Rightarrow (y-2)(4x+6) = -(8-x)$$

$$\Rightarrow 4xy + 6y - 8x - 12 = -8 + x$$

$$\Rightarrow x[4y-9] = 4 - 6y$$

$$\Rightarrow x = \frac{4-6y}{4y-9} \quad \text{si } \boxed{y = 9/4} \text{ impossible}$$

alors f n'est pas surjective

Pour $y \neq +\frac{9}{4}$, la fonction f est ~~surjective~~ surjective.

Comme elle est injective, alors f est bijective, donc admet une fct réciproque

$$\bar{f}^{1} : \mathbb{R} - \{\tfrac{9}{4}\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-\tfrac{3}{2}\}$$

$$x \longmapsto \bar{f}^{1}(x)$$

avec $\boxed{\bar{f}^{1}(x) = \dfrac{4 - 6x}{4x - 9}}$.

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
$1^{\text{ère}}$ année Licence.

Décembre 2022

Série de TD n°3 d'Algèbre 01

Exercice 1. Soit $\star$ une loi définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \star y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

1. Vérifier que $\star$ est commutatitive et admet un élément neutre e.
2. Résoudre les équations $2 \star y = 5$ et $x \star x = 1$.

Exercice 2.
Soit la loi de composition interne $\star$ définie sur $G =]-1 \quad 1[$ par $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

1. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.
2. Soit $H =]0 \quad 1[$, $(H, \star)$ est -il un sous groupe de G ?

Exercice 3.
Soit la loi de composition interne $\star$ définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par

$$x \star y = xy + 3(x + y) + 6.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R} - \{-3\}, \star)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $]-3 \quad +\infty[$ est un sous groupe de $\mathbb{R} - \{-3\}$.
3. Soit l'application f :$(\mathbb{R} - \{-3\}, \star) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$
   $x \mapsto f(x) = \lambda x + 3$.
   a. Déterminer λ pour que f soit un morphisme de groupes.
   b. Déterminer $Ker(f)$.
   c. Est ce que f est isomorphisme ? Si oui déterminer f^{-1}.

Exercice 4.
Les applications suivantes sont elles des homomorphismes ? Si oui, calculer leur noyau et leur image.

i) $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$
   $n \mapsto f(n) = (-1)^n$.
ii) $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$
   $x \mapsto g(x) = x^2$.
iii) $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$
   $x \mapsto h(x) = e^x$.

Université A/Mira - Béjaïa
Faculté de science Exactes
Département d'Informatique
1ère année licence

Corrigé de la série N° 03

Exercice n° 01

1) Commutativité de $*$

$*$ est commutative $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R};\ x*y = y*x$

on a $x*y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1)$

$= y*x$ (car le produit est commutatif).

2) $*$ admet un élément neutre $e \Leftrightarrow$

$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R};\ x*e = e*x = x$

on prend juste $x*e$ car $*$ est commutative

donc $x*e = x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ on a

$xe + (x^2-1)(e^2-1) = x \Rightarrow$

$xe + (x^2-1)(e-1)(e+1) = 0$

$\Rightarrow xe - x + (x^2-1)(e+1)(e-1) = 0$

$\Rightarrow x(e-1) + (x^2-1)(e+1)(e-1) = 0$

$\Rightarrow (e-1)\left[x + (x^2-1)(e+1)\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} e-1=0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x+(e+1)(x^2-1)=0 \end{cases} \to ①$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e=1 \\ \forall x \in \mathbb{R} : x+(e+1)x^2-(e+1)=0 \to ② \end{cases}$$

② ne peut pas vérifiée car le ~~coef~~ coefficient de x est $1 \neq 0$, donc la solution est donnée par $\boxed{e=1}$.

3) $2 * y = 5 \Rightarrow 2y+3(y^2-1)=5 \Rightarrow$

$3y^2+2y-8=0 \quad \Delta = 4+96=100, \ \sqrt{\Delta}=10$

$y_1 = \frac{-2+10}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}, \ y_2 = \frac{-2-10}{6} = \boxed{-2}$.

$\Downarrow$

$y \in \{-2, 4/3\}$

$x * x = 1 \Rightarrow x^2+(x^2-1)^2=0 \Rightarrow$

$x^2=0$ ou $(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ ou $x=\pm 1$

$x \in \{-1, 0, 1\}$

Exercice n°02

$\forall\ x, y \in]-1,1[= G,\quad x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

1) Montrons que $(G,*)$ est un groupe abélien

a) On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{y+x}{1+yx} = y*x$

(Car la somme et le produit sont commutatifs)

donc $*$ est commutative.

b) On a: $\forall x, y, z \in G$

$$x*(y*z) = x*\left[\frac{y+z}{1+yz}\right] = \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\left[\frac{y+z}{1+yz}\right]}$$

$$= \frac{\frac{x+y+z+xyz}{1+yz}}{\frac{1+yz+xy+xz}{1+yz}} = \boxed{\frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}} \to 1$$

$$(x*y)*z = \left[\frac{x+y}{1+xy}\right]*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}\cdot z}$$

$$= \frac{\frac{x+y+z+xyz}{1+xy}}{\frac{1+xy+xz+yz}{1+xy}} = \boxed{\frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}} \to 2$$

1 = 2, alors $*$ est associative.

c) Supposons que $*$ admet un élément neutre e, alors $\forall x \in G$ on a :

$$x * e = x \Rightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x$$

$$\Rightarrow x + e = x + x^2 e \Rightarrow e = x^2 e$$

$$\Rightarrow e(1-x^2) = 0 \Rightarrow e = 0$$ car $x \in]-1, 1[$ (c'est-à-dire $x \neq \pm 1$).

d) Supposons que $\forall x \in G$, x admet un élément symétrique x', alors :

$$x * x' = e \Rightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Rightarrow$$

$$x + x' = 0 \Rightarrow \boxed{x' = -x}.$$

Comme G admet un élément neutre $e = 0$ pour $*$, chaque élément de G a un élément symétrique et $*$ est associative, alors $(G, *)$ est un groupe de plus $*$ est commutative, alors $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou bien groupe abélien)

2) $H =]0\ 1[$ n'est pas un sous-groupe de $G =]-1\ 1[$, car $e = 0 \notin H$.

Exercice n° 03

$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-3\}$ on a:

$$x * y = xy + 3(x+y) + 6$$

Montrons que $(\mathbb{R} - \{-3\}, *)$ est un groupe commutatif

a) Commutativité de $*$

$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $x * y = xy + 3(x+y) + 6$

$= yx + 3(y+x) + 6 = y * x$

(Car la somme et le produit sont commutatifs dans $\mathbb{R} - \{-3\}$).

b) associativité de $*$

on a: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$$(x*y)*z = [xy + 3(x+y) + 6] * z$$

$$= (xy + 3(x+y) + 6) \cdot z + 3[xy + 3(x+y) + 6 + z] + 6$$

$$= xyz + 3(x+y)z + 6z + 3xy + 3(x+y) + 18 + 3z + 6$$

$$= \boxed{xyz + 3[x+y](3+z) + 3xy + 9z + 24} \quad (1)$$

$$x*(y*z) = x*\left[yz+3[y+z]+6\right]$$
$$= x\left[yz+3[y+z]+6\right] + 3\left[x+yz+3[y+z]+6\right]+6$$
$$= xyz+3xy+3xz+6x+3x+3yz+9(y+z)+18+6$$
$$= \boxed{xyz+3[x+y](3+z)+3xy+9z+24} \quad ②$$

Comme ① = ②, alors $*$ est associative.

c) Element neutre de $\mathbb{R}-\{-3\}$.

soit $x \in \mathbb{R}-\{-3\} \mid \exists e \in \mathbb{R}-\{-3\}$ vérifiant

$$x*e = x \Rightarrow xe+3[x+e]+6 = x$$
$$\Rightarrow xe+2x+3e+6 = 0$$
$$\Rightarrow e(x+3)+2(x+3) = 0$$
$$\Rightarrow (x+3)[e+2] = 0 \Rightarrow \boxed{e=-2} \text{ car}$$

$\boxed{x \in \mathbb{R}-\{-3\}}$. Donc l'element neutre de $\mathbb{R}-\{-3\}$ pour $*$ est $\boxed{e=-2}$.

d) Element symétrique

supposons que $x' \in \mathbb{R}-\{-3\}$ est le symétrique de $x \in \mathbb{R}-\{-3\}$, alors

$$x*x' = e \Rightarrow xx'+3(x+x')+6 = -2$$
$$\Rightarrow xx'+3x+3x' = -8 \Rightarrow (x+3)x' = -3x-8$$
$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{-3x-8}{x+3}} \in \mathbb{R}-\{-3\}$$

Donc $(\mathbb{R}-\{-3\}, *)$ est un groupe abélien.

2) Montrons que $H =]-3\ +\infty[$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}-\{-3\}$.

a) $\forall\ x, y \in]-3\ +\infty[$, on a

$$x * y = xy + 3(x+y) + 6$$
$$= (x+3)(y+3) - 3 > -3 \quad \text{car } (x+3)(y+3) > 0$$

donc on obtient

$$\forall x, y \in H, \quad x * y \in H.$$

b) pour $e = -2 \in H =]-3\ +\infty[$, De plus

$$x^{-1} = x' = \frac{-3x-8}{x+3} \in H, \quad \text{car } x+3 > 0$$

et $\dfrac{-3x-8}{x+3} > \dfrac{-3x-8-1}{x+3}$

$$\Rightarrow \frac{-3x-8}{x+3} > \frac{-3x-9}{x+3}$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-8}{x+3} > \frac{-3(x+3)}{(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-8}{x+3} > -3, \text{ donc } x' \in H.$$

On déduit que H est un sous-groupe de $\mathbb{R}-\{-3\}$.

3) Pour que f soit un homomorphisme de groupe, il faut et il suffit que

$f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$

On a $f(x*y) = f[xy + 3[x+y] + 6]$

$= \lambda[xy + 3[x+y] + 6] + 3$

$= \boxed{\lambda xy + 3\lambda(x+y) + 6\lambda + 3}$ (1)

On a aussi $f(x) \cdot f(y) = (\lambda x + 3)(\lambda y + 3)$

$= \boxed{\lambda^2 xy + 3(x+y) + 9}$ (2)

(1) = (2) $\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ 3\lambda = 3 \\ 6\lambda + 3 = 9 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 1}$.

$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R} - \{-3\} \mid f(x) = 1$ [élément neutre de la loi produit] $\}$

$= \{x \in \mathbb{R} - \{-3\} \mid x + 3 = 1\} = \{-2\}$.

Comme $Ker(f) = e$, alors f est injective

$\forall \alpha \in F$, α admet un antécédent de la forme $\boxed{x = \alpha - 3}$.

$\boxed{x = \alpha - 3}$, car : $\alpha = x + 3 \Longrightarrow \boxed{x = \alpha - 3}$

d'où f est surjective

Comme f est injective et surjective, alors f est un homomorphisme de groupes bijectif, l'isomorphisme inverse est

$$f^{-1} : F \longrightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$$
$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \boxed{x - 3}.$$

Corrigé de l'exercice n° 04

1) $(\mathbb{Z},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$

$n \longmapsto (-1)^n = f(n)$

Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, alors

$$f(n+m) = (-1)^{n+m} = (-1)^n \times (-1)^m = f(n) \times f(m).$$

Ainsi, ~~et~~ l'application f est un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^*$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors $n \in \ker f \Leftrightarrow (-1)^n = 1$

(1 élément neutre par rapport à $\times$ dans $\mathbb{R}^*$)

donc $(-1)^n = 1 \Leftrightarrow n$ est pair

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid n = 2k$, ainsi $\ker f = 2\mathbb{Z}$

$\mathrm{Im} f = (-1)^n, n \in \mathbb{Z} = \{-1, 1\}$

-1 si n est impair et 1 si n est pair

2) $(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$

$x \longmapsto x^2 = g(x)$

or a $g(1+1) = g(2) = 2^2 = 4$

et $g(1)+g(1) = 1^2+1^2 = 2$

Comme $2 \neq 4$, alors $g(1)+g(1) \neq g(1+1)$

donc g n'est pas un homomorphisme

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times) \\ x \longmapsto e^x = h(x) \end{array} \right.$

alors $h(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y$

donc h est un homomorphisme de groupe de $(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$

$x \in \operatorname{Ker} h \iff h(x) = 1 \iff e^x = 1 \iff$ $x = \ln(1) = 0$, par conséquent $\operatorname{Ker} h = \{0\}$ element neutre de $(\mathbb{R},+)$.

$\operatorname{Im} h$: $h(x) = e^x = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y > 0\}$.