Université Abderrahmane Mira de Béjaia. Janvier 2023.
Faculté des sciences exactes.
Département d'informatique (2 ème année RN).

Examen d'algèbre 03

Exercice 1 *(09 pts)*

Soit le système linéaire (S) à quatre équations et quatre inconnues réelles x, y, z et t :

$$(S) : \begin{cases} x + y - z + 2t = 8 \\ x + z - t = 0 \\ 2x + y + t = 8 \\ x - y - 2z + 3t = 5 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice augmentée associée à (S).
2. Résoudre le système (S) avec la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2 *(11 pts)*

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1/ Calculer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.
2/ Ecrire le spectre de A.
3/ Déterminer les vecteurs propres de A.
4/ A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
5/ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6/ Soit (S_n) le système de suites suivant :

$$(S_n) : \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 4v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 7v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + w_n \end{cases}$$

avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ *et* $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système de suites (S_n).