Examen de Remplacement Physique 1

Exercice 01(09 points) :

La position d'un point matériel M de masse m est donnée par ses coordonnées cartésiennes :

$$x(t) = R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \quad \text{et} \quad y(t) = R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)$$

où R et α sont des constantes positives et t désigne le temps.

1. Déterminer les dimensions et les unités (dans le système SI) des constantes R et α.

2. Dans la base des coordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer les vecteurs position $\vec{r}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ ainsi que leurs modules à l'instant t.

3. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point M et déduire sa nature.

4. Déterminer les composantes de l'accélération tangentielle a_T et de l'accélération normale a_N.

5. Donner les expressions des vecteurs unitaires $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$ de la base des coordonnées intrinsèques (base de Frénet) en fonction du temps t.

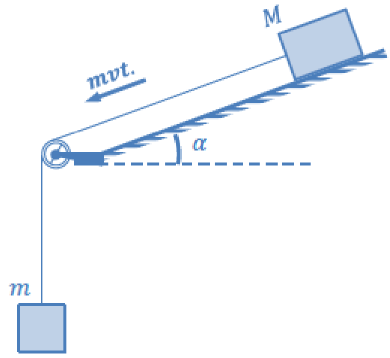
6. Donner les coordonnées polaires (ρ, θ) du point M.

7. Dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, écrire le vecteur position $\vec{r}(t)$ et déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ ainsi que leurs modules à l'instant t. Conclure.

8. Déterminer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que la trajectoire est orientée dans le sens trigonométrique (antihoraire) et que le point $A(0, R)$ est choisi comme origine de cette abscisse.

Exercice 2 (06points):

Un corps de masse $M = 7kg$ se trouve sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Il est relié à un corps de masse m par l'intermédiaire d'un fil inextensible passant à travers une poulie de masse négligeable (figure ci-dessous). Les frottements entre M et le plan incliné sont caractérisés par les coefficients de frottement statique $\mu s = 0{,}6$ et cinétique $\mu c = 0{,}4$.
On prend g=10m/s^2.

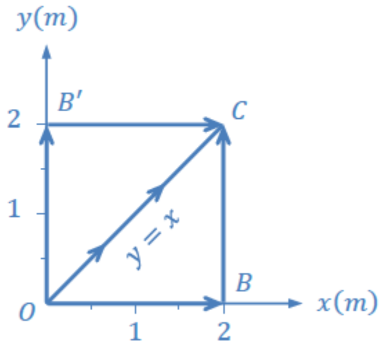


1. Représenter les forces agissant sur les deux masses M et m.
2. Déterminer la valeur de m pour que M se mette en mouvement.
3. Pour une valeur de $m = 2kg$, calculer l'accélération du système.
4. Calculer la tension du fil.
5. Calculer le module de la force de frottement appliquée sur M.

Exercice 3 (05point) :

Soit une particule qui se déplace sous l'action d'une force :

$$\vec{F}(x, y) = \frac{y^3}{3}\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath}$$



1. Calculer le travail de cette force suivant les chemins :
a. $O \to B \to C$.
b. $O \to B' \to C$.
c. $O \to C$, suivant l'équation $y = x$.
2. La force $\vec{F}$ est-elle conservatrice ? Pourquoi ?
3. Confirmer votre réponse par une deuxième méthode.

Bon courage

Corrigé

Exercice 01 (09 points):

1. Les dimensions et les unités (dans le système SI) des constantes R et α:

La dimension de R est : $[R] = L$, **(0,25)** son unité est le mètre (m). **(0,25)**

La dimension de α est : $[\alpha] = T^{-2}$, **(0,25)** son unité est le radian/seconde² (rad/s^2). **(0,25)**

2. Les vecteurs position $\vec{r}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ ainsi que leurs modules à l'instant t:

- $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} = Rcos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} + Rsin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}$ **(0,25)**
- $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{\left(Rcos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right)^2 + \left(Rsin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right)^2} = R(m)$ **(0,25)**
- $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} = -\alpha Rtsin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} + \alpha Rtcos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}$ **(0,25)**
- $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = \sqrt{\left(-\alpha Rtsin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right)^2 + \left(\alpha Rtcos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right)^2} = \alpha Rt(m/s)$ **(0,25)**
- $\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath} = -\alpha R\left(sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + \alpha t^2cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right)\vec{\imath} +$
  $\alpha R\left(cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) - \alpha t^2sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right)\vec{\jmath}$ **(0,25)**
- $\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2} = \alpha R\sqrt{1 + \alpha^2t^4}(m/s^2)$ **(0,25)**

3. L'équation cartésienne de la trajectoire du point M et sa nature :

Nous avons : $x^2 + y^2 = R^2\left(cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$ **(0,25)**

La trajectoire est un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon R qui est égal à son rayon de courbure ($R_c = R = C^{st}$). **(0,25)**

4. Les composantes de l'accélération tangentielle a_T et de l'accélération normale a_N :

$a_T(t) = \frac{dv}{dt} = \alpha R(m/s^2)$ **(0,5)**

- $a_N(t) = \frac{v^2}{R} = R\alpha^2t^2(m/s^2)$ **(0,5)**

5. Les expressions des vecteurs unitaires $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$ de la base des coordonnées intrinsèques (base de Frénet) en fonction du temps t:

- $\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{-\alpha Rtsin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} + \alpha Rtcos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}}{\alpha Rt} = -sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} + cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}$ **(0,25)**
- $\vec{e}_N = \frac{R}{\|\vec{v}\|}\frac{d\vec{e}_T(t)}{dt} = \frac{R}{\alpha Rt}\frac{d}{dt}\left(-sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} + cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}\right)$ **(0,25)**

$$\vec{e}_N = \frac{R}{\alpha Rt}\left(-\alpha tcos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} - \alpha tsin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}\right)$$

$\vec{e}_N = -cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\imath} - sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\vec{\jmath}$ **(0,25)**

Ou bien : $\vec{e}_N = \frac{\vec{a}_N}{a_N} = \frac{\vec{a}(t) - \vec{a}_T}{a_N}$

6. Les coordonnées polaires (ρ, θ) du point M:

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = R \\ tg(\theta(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}{cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)} = tg\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(t) = R & \textbf{(0,25)} \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 & \textbf{(0,5)} \end{cases}$$

7. Le vecteur position $\vec{r}(t)$ et les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ ainsi que leurs modules à l'instant t:

- $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e_\rho} = R\vec{e_\rho}$ **(0,25)**
- $\|\vec{r}(t)\| = \|R\vec{e_\rho}\| = R\|\vec{e_\rho}\| = R(m)$ **(0,25)**
- $\vec{v}(t) = v_\rho(t)\vec{e_\rho} + v_\theta(t)\vec{e_\theta} = \dot{\rho}(t)\vec{e_\rho} + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{e_\theta} = 0\vec{e_\rho} + R\alpha t\vec{e_\theta} = \alpha Rt\vec{e_\theta}$ **(0,5)**
- $\|\vec{v}(t)\| = \|\alpha Rt\vec{e_\theta}\| = \alpha Rt\|\vec{e_\theta}\| = \alpha Rt(m/s)$ **(0,25)**

- $\vec{a}(t) = a_\rho(t)\overrightarrow{e_\rho} + a_\theta(t)\overrightarrow{e_\theta} = \left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{e_\theta}$
  $\vec{a}(t) = -R\alpha^2t^2\overrightarrow{e_\rho} + \alpha R\overrightarrow{e_\theta}$ **(0,5)**
- $\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho(t)^2 + a_\theta(t)^2} = \sqrt{(-R\alpha^2t^2)^2 + (\alpha R)^2} = \alpha R\sqrt{1+\alpha^2t^4}(m/s^2)$ **(0,25)**

Conclusion :

- Quel que soit la base des coordonnées utilisée (cartésienne ou polaire) les modules à l'instant t de $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ ont les même valeurs. **(0,25)**
- $\|\vec{a}_T(t)\| = \|\vec{a}_\theta(t)\| = C^{st}$ et $\|\vec{a}_N(t)\| = \|\vec{a}_\rho(t)\|$. **(0,25)**
- Le mouvement circulaire uniformément accéléré puisque $\|\vec{a}_T(t)\| = \|\vec{a}_\theta(t)\| = C^{st} > 0$. **(0,25)**

8. L'abscisse curviligne $s(t)$ du point M:

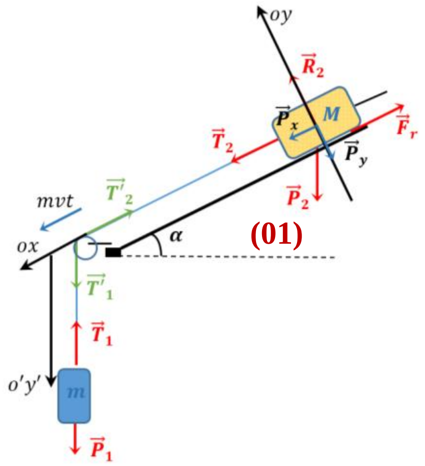
$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = \alpha Rt \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}\alpha Rt^2 + s_0$ **(0,25)**

A $t = 0$, M se trouve au point $B\big(x(0), y(0)\big) \equiv B(R, 0)$ et l'origine des abscisses curviligne est le point $A(0, R)$, donc : $s_0 = \frac{-R\pi}{2}$. **(0,25)**

Alors :

$s(t) = \frac{1}{2}\alpha Rt^2 - \frac{R\pi}{2} = \frac{R}{2}(\alpha t^2 - \pi) = R\left(\theta(t) - \frac{\pi}{2}\right)$ **(0,25)**

Exercice 02 (07points):



1. Les forces agissant sur M et m voir la figure ci-contre

2. La valeur de m pour que M se met en mvt :

Soit m la masse minimale permettant au système d'être arraché de son état d'équilibre. On applique alors le principe fondamental de la dynamique au seuil de l'équilibre :

- La masse M :

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$: $\vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_r + \vec{T}_2 = \vec{0}$ **(0,25)**

$$\begin{cases} ox: P_x + T_2 - F_r = 0 & \mathbf{(0,25)} \\ oy: -P_y + R_2 = 0 & \mathbf{(0,25)} \end{cases}$$

Force de frottement $F_r = \mu_s R_2 = \mu_s P_y = \mu_s Mg\cos\alpha$ **(0,25)**

$$T_2 + Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha = 0 \quad (01) \quad \mathbf{(0,25)}$$

- La messe m :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \ : \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \quad \mathbf{(0,25)}$$

Projection sur $o'y'$: $P_1 - T_1 = 0$ (02) **(0,25)**

Masse de fil et celle de la polie sont négligeables, alors :

$m_{fil} \sim 0 \rightarrow \begin{cases} T_1 = T'_1 \\ T_2 = T'_2 \end{cases}$ et $m_{polie} \sim 0 \rightarrow T'_1 = T'_2$. D'où $T_1 = T_2$ **(0,25)**

$(1) + (2)$ donne :

$$Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha + mg = 0$$
$$m = M(\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha) \quad \mathbf{(0,25)}$$
$$m = 1.55kg \quad \mathbf{(0,25)}$$

3. Accélération du système pour $m = 2kg$:

- La masse M :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \ : \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_r + \vec{T}_2 = M\vec{a} \quad \mathbf{(0,25)}$$

$$\begin{cases} ox: P_x + T_2 - F_r = Ma & \mathbf{(0,25)} \\ oy: -P_y + R_2 = 0 & \mathbf{(0,25)} \end{cases}$$

Force de frottement $F_r = \mu_c R_2 = \mu_c P_y = \mu_c Mg\cos\alpha$ **(0,25)**

$$T_2 + Mg\sin\alpha - \mu_c Mg\cos\alpha = Ma \quad (03) \quad \mathbf{(0,25)}$$

- La messe m :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \ : \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m\vec{a} \qquad (\mathbf{0,25})$$

Projection sur $o'y'$: $P_1 - T_1 = ma$ (04) **(0,25)**

Masse de fil et celle de la polie sont négligeables, alors :

$m_{fil} \sim 0$ et $m_{polie} \sim 0 \rightarrow T_1 = T_2$

(3) + (4) donne :

$$Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha + mg = (M+m)a$$

$$a = \frac{Mg\sin\alpha - \mu_s Mg\cos\alpha + mg}{M+m} \qquad (\mathbf{0,5})$$

$$a = 1.96ms^{-2} \qquad (\mathbf{0,25})$$

4. La tension du fil

$$T = T_1 = T_2 = m(g-a) \rightarrow T = 16.08N \qquad (\mathbf{0,25})$$

5. Force de frottement :

$$F_r = \mu_c R_2 = \mu_c Mg\cos\alpha = 34.29N \qquad (\mathbf{0,25})$$

Exercice 03 (05 points):

1. Calcul du travail de la force :

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = \int_O^C \vec{F}.d\vec{l} = \int_O^C \left(\frac{y^3}{3}\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath}\right).(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}) = \int_O^C \left(\frac{y^3}{3}dx + xy^2dy\right)$$

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = \int_O^C \frac{y^3}{3}dx + \int_O^C xy^2dy \qquad \mathbf{(0,5)}$$

- Travail suivant $O \rightarrow B \rightarrow C$

De O à B ; $y = 0$ et x varie de 0 à 2. Alors que de B à C ; $x = 2$ $(dx = 0)$ et y varie de 0 à 2 **(0,25)**

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = W_{O\to B}(\vec{F}) + W_{B\to C}(\vec{F}) = \int_O^B \frac{y^3}{3}dx + \int_O^B xy^2dy + \int_B^C \frac{y^3}{3}dx + x\int_B^C y^2dy \qquad \mathbf{(0,5)}$$

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = 0 + 0 + 0 + 2\int_0^2 y^2dy \qquad \mathbf{(0,25)}$$

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = \frac{2}{3}2^3 = \frac{16}{3}J \qquad \mathbf{(0,25)}$$

- Travail suivant $O \rightarrow B' \rightarrow C$

  De O à B' ; $x = 0$ et y varie de 0 à 2. Alors que de B' à C ; $y = 2$ $(dy = 0)$ et x varie de 0 à 2 **(0,25)**

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = W_{O\to B'}(\vec{F}) + W_{B'\to C}(\vec{F}) = \int_O^{B'} \frac{y^3}{3}dx + \int_O^{B'} xy^2dy + \int_{B'}^C \frac{y^3}{3}dx + x\int_{B'}^C y^2dy \qquad \mathbf{(0,5)}$$

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = 0 + 0 + \frac{2^3}{3}\int_0^2 dx + 0 \qquad \mathbf{(0,25)}$$

$$W_{O\to C}(\vec{F}) = \frac{2}{3}2^3 = \frac{16}{3}J \qquad \mathbf{(0,25)}$$

- Travail suivant la droite $y = x$ $(dx = dy)$ **(0,25)**
- $W_{O\to C}(\vec{F}) = \int_O^C \frac{y^3}{3}dx + \int_O^C xy^2dy = \int_0^2 \frac{y^3}{3}dy + \int_O^2 yy^2dy = \int_0^2 4\frac{y^3}{3}dy = \frac{y^4}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}J$ **(01)**

2. La force est conservative puisque son travail ne dépend pas du chemin suivi. **(0,25)**

3. Confirmation

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3/3 & xy^2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad \mathbf{(0,5)}$$