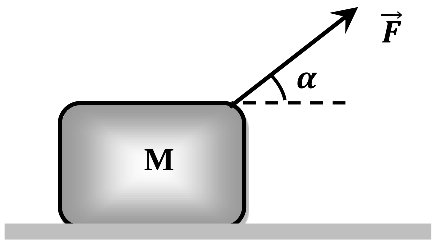
Examen de Remplacement Physique 1

Exercice 01 (6 pts)

Un point matériel est restreint à se déplacer dans un plan. Son accélération tangentielle $a_T = \alpha$ et normale $a_N = \beta t^4$ avec α et β des constantes positives. A l'instant $t = 0s$ le point matériel est immobile à l'origine.
Trouver :

1- L'expression de la vitesse v et de l'abscisse curviligne s du mobile ;
2- Le rayon de courbure R_C ;
3- L'expression de R_C et de l'accélération totale a en fonction de la distance s.

Exercice 02 (8 pts)

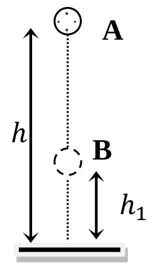


I. Un bloc M de masse m glisse sans frottement sur un plan horizontale sous l'action une force $\vec{F}$ de module $F = bt$, faisant un angle α avec le plan horizontal. b est une constante positive.

1- Représenter les différentes forces appliquées sur M ;
2- Trouver l'expression de l'accélération a du bloc ;
3- Trouver l'expression de la vitesse v du bloc et de la distance parcourue x, sachant que à $t = 0s$, $v = 0$ et $x = 0$;
4- Trouver la vitesse du bloc lorsqu'il quitte le sol ;
5- Qu'elle est la distance parcourue.

II. On considère le même bloc M mais cette fois-ci il est sous l'action une force constante de module $F = \frac{mg}{3}$ (m la masse du bloc et g la gravitation). L'angle α que fait la force avec le plan horizontal varie avec son déplacement, x, selon la relation $\alpha = \beta x$, avec β est une constante positive et x la distance parcourue par le bloc de puis sa position initiale.
En utilisant le principe fondamental de la dynamique, trouver l'expression de la vitesse du bloc en fonction de x. (Indication $a = dv/dt = vdv/dx$).

Exercice 03 (6 pts)



Une particule de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point A d'altitude h. A l'instant $t = t_1$, la particule se trouve à une hauteur h_1. Sachant que cette particule est soumise à deux forces, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de frottement de l'aire $\vec{f} = -km\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse de la particule. La variation de la vitesse de la particule en fonction du temps est donnée par :

$$v = \frac{g}{k}(1 - \exp(-kt))$$

1- Calculer la variation de l'énergie cinétique de la particule entre le point A et B
2- Monter que le travail de la force poids entre le point A et B est donnée par :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \frac{mg^2}{k}\left(t_1 + \frac{1}{k}(\exp(-kt_1) - 1)\right)$$

3- Vérifier que le travail de la force de frottement de l'aire est donné par :

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\frac{mg^2}{k}\left(t_1 - \frac{1}{2k}(\exp(-2kt_1) - 1) + \frac{2}{k}(\exp(-kt_1) - 1)\right)$$

4- Vérifier le théorème de l'énergie cinétique.

Bon courage

Corrige

Exercice 01 (06 points)

1- L'expression de v et de s

$$a_T = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a_T dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \alpha\, dt \rightarrow v = \alpha t \quad \textbf{(0,75)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = vdt \quad \textbf{(0,25)}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \alpha t\, dt \rightarrow s = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \textbf{(0,75)}$$

2- Rayon de courbure

$$R_C = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\alpha^2 t^2}{\beta t^4} = \frac{\alpha^2}{\beta t^2} \quad \textbf{(01)}$$

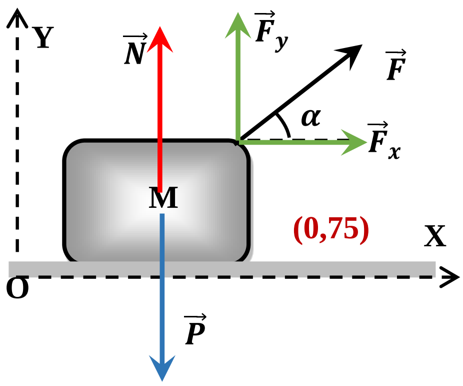
3- L'expression de R_C et de a en fonction de s

$$s = \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow t^2 = 2s/\alpha \quad \textbf{(01)}$$

$$R_C = \frac{\alpha^2}{\beta t^2} = \frac{\alpha^2}{\beta(2s/\alpha)} = \frac{\alpha^3}{2\beta s} \quad \textbf{(01)}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \rightarrow \quad a^2 = \alpha^2 + \left(\beta\left(\frac{2s}{\alpha}\right)^2\right)^2 = \alpha^4 + \frac{4\beta^2 s^4}{\alpha^4} \quad \textbf{(01.5)}$$

Exercice 02 (08 points)



1- Représentation des forces (figure ci-contre)

2- de l'accélération a du bloc :

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ **(0,25)**

Projection

$$\begin{cases} (OX): F\cos\alpha = ma \quad \rightarrow a = \frac{1}{m}F\cos\alpha & \textbf{(0,5)} \\ (OY): N + F\sin\alpha - mg = 0 \rightarrow N = mg - F\sin\alpha & \textbf{(0,5)} \end{cases}$$

3- L'expression de la vitesse v et de la distsance x

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \quad \textbf{(0,25)}$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{1}{m}(bt\cos\alpha) \quad dt \rightarrow v = \frac{1}{2m}(bt^2\cos\alpha) \quad \textbf{(0,75)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt \quad \textbf{(0,25)}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (bt^2\cos\alpha)/2m\, dt \rightarrow x = \frac{1}{6m}(bt^3\cos\alpha) \quad \textbf{(0,75)}$$

4- La vitesse v lorsque M quitte le sol :

$$N = 0 \rightarrow mg - F\sin\alpha = 0 \quad \textbf{(0,5)}$$

$$t = \frac{mg}{b\,sin\alpha} \quad \textbf{(0,5)}$$

$$v = \frac{1}{2m}(bt^2 cos\,\alpha) = \frac{1}{2m} bcos\,\alpha \left(\frac{mg}{b\,sin\alpha}\right)^2 = \frac{mg^2}{2b}\frac{1}{\sin\alpha} cotg(\alpha) \quad \textbf{(0,5)}$$

5- La distance x lorsque M quitte le sol

$$x = \frac{1}{6m}(bt^3 cos\,\alpha) \rightarrow x = \frac{1}{6m} bcos\,\alpha \left(\frac{mg}{b\,sin\alpha}\right)^3 = \frac{m^2g^3}{6b^2}\frac{1}{\sin^2\alpha} cotg(\alpha) \quad \textbf{(0,5)}$$

II- Expression de la vitesse en fonction de la distance

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ **(0,25)**
Projection

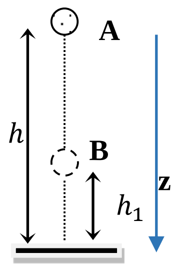
$$\begin{cases} (OX): Fcos\,\alpha = ma \rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m} Fcos\alpha \\ (OY): N + F\sin\alpha - mg = 0 \rightarrow N = mg - F\sin\alpha \end{cases} \quad \textbf{(0,25)}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}Fcos(\beta x) \rightarrow \frac{vdv}{dx} = \frac{1}{m}Fcos(\beta x) \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\int_0^v vdv = \frac{1}{m}F\int_0^x cos(\beta x)\,dx \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{m\beta}\frac{mg}{3}\,sin(\beta x) \quad \textbf{(0,5)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g}{3\beta} sin(\beta x)} \quad \textbf{(0,5)}$$

Exercice 03 (06 points)



1- Variation de l'énergie cinétique de la particule entre le point A et B

$$v_B = \frac{g}{k}(1 - \exp(-kt_1))$$

$$v_A = 0$$

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{k}\right)^2 (1 - \exp(-kt_1))^2 \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}\frac{mg^2}{k^2}(1 - 2\exp(-kt_1) + \exp(-2kt_1)) \quad \textbf{(0,5)}$$

2- Travail de la force poids entre le point A et B :

$$dW(\vec{P}) = \vec{P}.d\vec{l} \quad \textbf{(0,25)}$$

Avec $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} \rightarrow d\vec{l} = \vec{v}dt$ **(0,25)**

$$dW(\vec{f}) = m\vec{g}\vec{v}dt = mgvdt = mg\left(\frac{g}{k}(1-\exp(-kt))\right)dt = \frac{mg^2}{k}\big((1-\exp(-kt))\big)dt \quad \textbf{(0,5)}$$

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_0^{t_1} \frac{mg^2}{k}(1-\exp(-kt))dt = \frac{mg^2}{k}\int_0^{t_1}(1-\exp(-kt))^2\,dt$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \frac{mg^2}{k}\left[\int_0^{t_1} dt - \int_0^{t_1}\exp(-kt)\,dt\right]$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \frac{mg^2}{k}\left(t_1 + \frac{1}{k}(\exp(-kt_1)-1)\right) \quad \textbf{(0,5)}$$

3- Travail de la force de frottement de l'aire est donné par

$$dW(\vec{f}) = \vec{f}.d\vec{l} \quad \textbf{(0,25)}$$

Avec $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} \to d\vec{l} = \vec{v}dt$ **(0,25)**

$$dW(\vec{f}) = -km\vec{v}\vec{v}dt = -kmv^2dt$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\int_0^{t_1} k\,m\left(\frac{g}{k}(1-\exp(-kt))\right)^2 dt = -\frac{mg^2}{k}\int_0^{t_1}(1-\exp(-kt))^2\,dt \quad \textbf{(0,5)}$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\frac{mg^2}{k}\left[\int_0^{t_1} dt - 2\int_0^{t_1}\exp(-kt)\,dt + \int_0^{t_1}\exp(-2kt)\,dt\right]$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\frac{mg^2}{k}\left(t_1 + \frac{2}{k}(\exp(-kt_1)-1) - \frac{1}{2k}(\exp(-2kt_1)-1)\right) \quad \textbf{(0,5)}$$

4- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = W_{A\to B}(\vec{F}_{cosr}) + W_{A\to B}(\vec{F}_{nonc}) = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f}) \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}\frac{mg^2}{k^2}(1 - 2\exp(-kt_1) + \exp(-2kt_1)) \quad \textbf{(0,5)}$$

$$W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f}) = \frac{mg^2}{k}\left(t_1 + \frac{1}{k}(\exp(-kt_1)-1)\right)$$
$$+ -\frac{mg^2}{k}\left(t_1 + \frac{2}{k}(\exp(-kt_1)-1) - \frac{1}{2k}(\exp(-2kt_1)-1)\right)$$

$$= \frac{mg^2}{k}\left(-\frac{1}{k}(\exp(-kt_1)-1) + \frac{1}{2k}(\exp(-2kt_1)-1)\right) = \frac{1}{2}\frac{mg^2}{k^2}(1-2\exp(-kt_1)+\exp(-2kt_1)) \quad \textbf{(01)}$$

Donc, le théorème de l'énergie cinétique est vérifier.