جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Corrigé-type --- Examen FINAL --- Microéconomie I

Exercice 01 : Equilibre du consommateur : *08 points*

Soit la fonction d'utilité donnée par la relation $U_T = f(x,y) = 2.x + 4.y + 8.x.y + 10$

1. Calculez les quantités optimales des biens X et Y si le revenu du consommateur R= **725** DA et les prix unitaires des biens sont, respectivement, $\mathbf{P_x = 12}$ DA et $\mathbf{P_y = 4}$ DA.

La solution arithmétique :

A. La formalisation de l'équilibre du consommateur :

$$\begin{cases} Max\ U\_T = f(x,y) = 2.x + 4.y + 8.x.y + 10 \\ {}^{S}/_{C} \quad R = x.px + y.Py = 12.x + 4.y = 725\ DA. \end{cases}$$

B. La construction de la fonction de Lagrange :

$$L = f(x,y) + \lambda.(R - x.Px - y.Py)$$
$$\text{L} = 2.x + 4.y + 8.x.y + 10 + \lambda.(\text{R} - 12.\text{x} - 4.\text{y})$$

C. La résolution du problème : Cette fonction L est optimisée lorsque ses dérivées partielles sont égales à zéro. On va donc calculer et vérifier le moment où les 03 dérivées partielles de L sont égales à zéro.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 2 + 8.y - \lambda.P_x = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta x} = 4 + 8.x - \lambda.P_y = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 + R - x.P_x - y.P_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2 + 8.y}{P_x} = 0 \\ \lambda = \frac{4 + 8.x}{P_y} = 0 \\ R - x.P_x - y.P_y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2 + 8.y}{12} = 0 \ldots\ldots(1) \\ \lambda = \frac{(4 + 8.x)}{4} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ R - 12.x - 4.y = 0 \ldots\ldots\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2 + 8.y}{12} = \frac{(4 + 8.x)}{4} = 12.(4 + 8.x)$$

$$On\ (1) = (2) \Leftrightarrow 4.(2 + 8.y) \Leftrightarrow (2 + 8.y) = 3.(4 + 8.x) \Leftrightarrow 8.y = 12 + 24.x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{10 + 24.x}{8}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5 + 12.x}{4}$$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (3) :

$\Rightarrow R = 12.x + 4.\left(\frac{5+12.x}{4}\right) \Leftrightarrow R = 24.x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{R-5}{24} = \frac{725-5}{24} = 30\ unités$ Et $y = \frac{5+12.(30)}{4} = 91{,}25\ Unités$

Donc, les quantités optimales sont $(x,y) = (30;\ 91{,}25)$. 02

2. Calculez la valeur du TMS xày au point d'équilibre.

$TMS\ xày = \frac{Umgy}{Umgx} = \frac{2+8.y}{(4+8.x)} = \frac{2+8.(91.25)}{(4+8.(30))} = \frac{\mathbf{732}}{\mathbf{244}} = \mathbf{3}$ 01

3. Pour garder le même niveau d'utilité, quelle serait la variation de la quantité Y si le consommateur

4.

	$\boldsymbol{Var\ y}$	$\boldsymbol{Var.x}$	$\boldsymbol{\Delta Ut}$
$TMS\ xày = 3$	**-3 unités**	**+1 unité**	**0**
	$\boldsymbol{\Delta y}$	**- 4 unités**	**0**

$$\boldsymbol{\Delta y = \frac{-4.(-3)}{1} = +12\ unités}$$

01

Une diminution de la quantité du bien X de 4 unités est compensée par une hausse de la quantité consommée du bien Y afin de garantir un même niveau de satisfaction pour le consommateur.

4. Quel est l'effet d'une baisse du revenu de 50 ^{DA} sur le niveau de l'utilité ?

La valeur du multiplicateur de Lagrange est calculée à partir de la relation : $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{Umgx}}{\boldsymbol{Px}} = \frac{\boldsymbol{Umgy}}{\boldsymbol{Py}}$

$\Leftrightarrow \ \lambda = \frac{2+8.(91,25)}{12} = \frac{(4+8.(30)}{4} = \mathbf{61}.$ **0,5**

On a $dR = -50 \ \ DA$ et $dU = \ \boldsymbol{\lambda} * dR = 61 * (-50) = \ -3\,050 \ Utils$ **01**

Une diminution du revenu du consommateur va réduire le niveau de son utilité de 3 050 *utils Ceteris paribus*.

5. Quelle est la variation du revenu nécessaire pour accroître l'utilité totale de 40 % ?

D'abord le niveau de l'utilité totale à l'équilibre : $Max\ U = f\ (30;\ 91,25) = \ 22335\ Utils$ **0,5**

On a $dU = +40\%.(22335) = +8934\ utils$ Et $dR = \frac{dU}{\lambda} = \frac{+8934}{61} = +146,46\ DA.$ **01**

En conclusion, pour accroitre le niveau de l'utilité de 40%, il faut accroître le revenu du consommateur de 146,46^{DA}.

6. Dressez une représentation graphique de la situation du consommateur au point d'équilibre.

La représentation graphique du point d'équilibre (La droite budgétaire (son équation et ses points d'intersection avec les axes) et la courbe d'indifférence (les quantités optimales et le maximum d'utilité).

01

Exercice 02 : Fonction de demande et élasticités : *04 points*

Soit Dx la fonction de demande individuelle d'un consommateur rationnel telle que :

$$Dx = f(R, Px, Py) = -\,R + 6\,.Px^2 - 2.\ Py$$

1. Calculez le niveau de Dx pour R = 24 $^{\mathbf{DA}}$, Px =5 $^{\mathbf{DA}}$, et Py = 3$^{\mathbf{DA}}$.

$$Dx = -\ 24 + 6\,.(5)^2 - 2.\ (3) = 120\ unités$$ **0,5**

2. Déterminez la nature du bien X en calculant l'élasticité-revenu.

Calcul de l'élasticité-revenu :

$$\varepsilon_{\frac{Dx}{R}} = \frac{\delta Dx}{\delta R}.\frac{R}{Dx} = -1.\frac{24}{120} = \mathbf{-\ 0,2}$$ **0,5**

L'élasticité-revenu de la demande Dx est négativé ($\varepsilon_{\frac{Dx}{R}} < 0$). Le bien X est donc **un bien inférieur. Cela signifie qu'il existe une relation inverse entre Dx et R.** Un accroissement du revenu R de 1% va provoquer une baisse de la demande de 0,2 % *toutes choses égales par ailleurs.* **01**

3. Quelle est la variation de la demande de X si Py diminue de 40% *toutes choses égales par ailleurs* ?

Calcul de l'élasticité-croisée :

$$\varepsilon_{Dx/Py} = \frac{\delta Dx}{\delta Py}.\frac{Py}{Dx} = -2.\frac{3}{120} = \ \mathbf{-\ 0,05}$$ **0,5**

L'élasticité-croisée est négative ($\mathcal{E}_{Dx/Py} < 0$), les biens **X et Y sont des biens complémentaires.**
Le consommateur peut acquérir le bien X à la place de Y et *vice-versa*. Une hausse de Py de 1% engendre une baisse de Dx de 0,05 % *ceteris paribus*.

	$\boldsymbol{Var\ Py}$	$\boldsymbol{Var\ Dx}$
$\varepsilon_{Dx/Py} = -0,05$	**+ 1 %**	**-0,05%**
	-40 %	**?**

$$\frac{\boldsymbol{\Delta Dx}}{\boldsymbol{Dx}} = \frac{\mathbf{-40\%.(-0,05\ \%)\%}}{\mathbf{1}} \mathbf{= +\ 2\ \%}$$ **01**

On remarque qu'une diminution de Py de 40 % va induire un accroissement du niveau de la demande du bien X de **+ 2** % *toutes choses égales par ailleurs*.

4. Calculez l'élasticité-directe de la demande de X. Interprétez le résultat obtenu.

Calcul de l'élasticité-directe :

$$\varepsilon_{Dx/PX} = \left|\frac{\delta Dx}{\delta Px}.\frac{Px}{Dx}\right| = \left|+12.Px.\frac{5}{120}\right| = \left|+\frac{300}{120}\right| = +2,5$$ **0,5**

On a $\mathcal{E}_{\frac{Dx}{PX}} > 1$ donc **la demande du bien X est élastique.**Une **augmentation** du prix du bien X (+ 1%) va engendrer une **augmentation plus que** proportionnelle de Dx (+2,50 %). Le bien x est un bien du type *giffen* ($\varepsilon_{\frac{Dx}{R}} < 0\ et\ \mathcal{E}_{\frac{Dx}{PX}} positive$).

Exercice 03 : Les productivités physique, l'homogénéité et les rendements d'échelle :

Partie I : Productivités physiques : *04 points*

Soit un fabricant algérien de câbles électriques dont la fonction de production est résumée par la relation : $p = f(k,l) = 10\,.k.l^2 - \frac{1}{75}.\ k.l^3$ où k est la quantité du capital de l'entreprise (en 10^6 DA), l le nombre de travailleurs, et p la quantité de câbles fabriquée (en Km).

En courte période, on considère que la quantité du facteur capital est constante et $k = k_0=6$.
La fonction de productivité physique totale du facteur l est alors :

$$PT_L = f(k_0,l) = 60.l^2 - 0{,}08.l^3$$

1. Déterminez le niveau le plus élevé (le maximum) de la productivité moyenne PM_L.

Méthode 01 : Lorsque PML'=0

On a $PM_L = \frac{60.l^2 - 0{,}08.l^3}{l} = 60.l^1 - 0{,}08.l^2$ et PM_L est maximisée pour PML'= $60 - 0{,}16.l = 0$

$$l = \frac{60}{0{,}16} = 375\ ouvriers.$$

Méthode 02 : Lorsque PML=Pmg

On a : PML= $60.l^1 - 0{,}08.l^2$ $et\ Pmg_L = f'(k_0,l) = 120.l^1 - 0{,}24.l^2$

$\Leftrightarrow 60.l^1 - 0{,}08.l^2 = 120.l^1 - 0{,}24.l^2$
$0{,}24.l^2 - 0{,}08.l^2 = 120.l^1 - 60.l^1$

$\Leftrightarrow 0{,}16.l^2 = 60.l^1 \Leftrightarrow 0{,}16.l$

$\Leftrightarrow l = \frac{60}{0{,}16} \Leftrightarrow l = 375\ ouvriers.$

Max $PM_L = 60.(375) - 0{,}08.(375)^2 = 11\,250\ km/ouvrier$ **01**

2. Quelle est la quantité du facteur L qui maximise le niveau de la productivité totale ?

La productivité totale atteint son maximum lorsque sa dérivée première est égale à zéro.

PTL= $f(k_0,l) = 60.l^2 - 0{,}08.l^3$

PTL'= $f'(k_0,l) = 120.l^1 - 0{,}24.l^2 = 0 \Leftrightarrow 120.l^1 = 0{,}24.l^2\ 0 \Leftrightarrow 120 = 0{,}24.l = 0$

$l = \frac{120}{0.24} = 500\ ouvriers.$ **01**

Ainsi, on a calculé que la productivité totale est maximisée lorsque la quantité du facteur l=500 ouvriers.

3. Quelles sont les coordonnées (l, PT_L) du point d'inflexion ?

Les point d'inflexion correspond à l'instant où la seconde dérivée s'annule.

$$PT_L'' = 120 - 0{,}48.l^1 \Leftrightarrow l = \frac{120}{0{,}48} = 250\ ouvriers$$ **0,5**

Et la valeur de la $Pmgl = 60.250^2 - 0{,}08.250^3 = 2\,500\,000\ Km.$

Les coordonnées du point d'inflexion sont : (l, PT_L) = (**250**, 2 500 000). **01**

4. Déduisez alors la quantité l qui maximise la productivité marginale de l'entreprise. **0,5**

Le point d'inflexion sur la courbe de PTL correspond au maximum sur la courbe de $Pmgl$.

Ainsi, la courbe de $Pmgl$ est maximale pour :$\Leftrightarrow l = \frac{120}{0{,}48} = 250\ ouvriers$

Partie II : Fonction homogènes et rendements d'échelle : *04 points*

Soit $p = f(k,l) = \frac{\frac{1}{2}.k^2.l^{\frac{1}{2}}}{2.l^{0{,}5}}$ la fonction permettant de mesurer le niveau de production d'une entreprise de textiles en longue période.

1. Démontrez que la fonction p est une fonction de production homogène ?

On a $p = f(k,l) = \frac{\frac{1}{2}.k^2 .l^{\frac{1}{2}}}{2.l^{0,5}}$

Et $f(a.k, a.l) = \frac{\frac{1}{2}.(a.k)^2 .(a.l)^{\frac{1}{2}}}{2.(a.l)^{0,5}} = \frac{\frac{1}{2}.a^2.a^{0.5}.k^2 .l^{\frac{1}{2}}}{2.a^{0.5}.l^{0,5}} = \frac{a^{2.5}.\left(\frac{1}{2}.k^2 .l^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{0.5}.2.l^{0,5}} = \frac{a^{2.5}}{a^{0.5}}.\frac{\frac{1}{2}.k^2 .l^{\frac{1}{2}}}{2.l^{0,5}}$

$\Leftrightarrow f(a.k, a.l) = a^2.p$ 01

Donc p est une fonction de production homogène de degré **λ=2.**

2. Quelle est la nature des rendements d'échelle de cette fonction ? 0.5

Les rendements d'échelle de cette fonction **sont croissants** car le degré d'homogénéité **λ>1**.

3. Quelle est la variation relative de la production (***en %***) obtenue lors d'une augmentation des quantités des deux facteurs K et L de **40%** *(une augmentation simultanée)* ? *Faites une réponse explicite complète.*

Une hausse simultanée de 40 % de la quantité des facteurs Ket L signifie une multiplication de leurs quantités par 1.8, ce qui revient à calculer : $f(1{,}4.k, 1{,}4.l) = 1{,}4^2 * p = 1{,}96.p$ 01

Une hausse de la quantité de K et L de 40% va permettre une augmentation du volume de la production augmentera de 96% *toutes choses égales par ailleurs*.

4. Si le producteur souhaite multiplier par 6 son niveau de production, quelle est la variation simultanée des quantités K et L nécessaire pour cela ? *Faites une réponse appuyée par vos calculs.* 1.5

$$On\ a\ f(a.k, a.l) = a^2 * p = 6.p \Leftrightarrow a^2 = 6 \Leftrightarrow a = \sqrt{6} \Leftrightarrow a = 2{,}45$$

Le volume de la production sera multiplié par 6 si le producteur augmente la quantité de K et L, *simultanément*, de 145 % *toutes choses égales par ailleurs*.