Proba-Stat

Université de A.MIRA–Béjaia ® 2022-2023
Faculté de Technologie– $1^{\text{ère}}$ Année ST-Ingénieur

Examen Final de Probabilités & Statistiques
(Durée 01h30min)

Exercice 1 (09 points) : Soit la série statistique suivante qui représente la répartition de n étudiants selon le nombre de fois où ils consultent les réseaux sociaux par jour :

4 3 3 4 3 6 3 5 3 3 5 3 4 3 6 3 3 6 4 3 5 3 3 6 3

1. Déterminer :
   - La population, sa taille et l'unité statistique.
   - L'étendue, le caractère étudié, sa nature et les modalités.
2. Établir le tableau statistique et tracer le polygône des fréquences.
3. Déterminer la fonction de répartition de cette série et tracer son graphe.
4. Calculer le mode (Mo), la médiane (Me), la moyenne ($\overline{X}$) et le $3^{\text{ème}}$ quartile Q_3 (interpréter Q_3).
5. Quelle est la proportion d'étudiants ayant fait au plus 4 consultations (par jour) ?.
6. Déterminer le nombre d'étudiants pour lequel on a observé un nombre de consultations compris dans l'intervalle $[2.5,\ 5.5]$.

Exercice 2 (08 points) : Le tableau ci-dessous représente la vitesse (en Km/h) de 100 véhicules enregistrés par un radar lors d'un contrôle routier.

Vitesse	$[75, 80[$	$[80, 90[$	$[90, 95[$	$[95, 100[$
Effectif	10	38	12	40

1. Représenter graphiquement cette série et calculer le mode.
2. Tracer la courbe cumulative croissante des fréquences.
3. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et la variance $V(X)$.
4. Calculer l'intervalle interquartile $Q_3 - Q_1$.
5. Quelle est la proportion de véhicules dont la vitesse est supérieure ou égale à $\overline{X} + \sigma(X)$?.

Exercice 3 (03 points) : Soit l'ensemble $E = \{2, 3, 5, 7, 9\}$. Avec les chiffres de E,

1. Combien peut on avoir de nombres de 4 chiffres (avec et sans répétition) ?.
2. Parmi ces nombres, combien sont inférieurs à 4000 ?.

Bonne chance

Corrigé - Examen de PROBA- STAT-

Exercice 1 : (09 pts) :

1. La population : Les étudiants. (0,25)

\# Sa taille : $n = 25$. L'unité statistique : un étudiant. (0,5)

. L'étendue : $e = x_{max} - x_{min} = 6 - 3 = 3$ (0,25)

\# Le caractère étudié : le nombre de consultations de réseaux sociaux. (0,25)

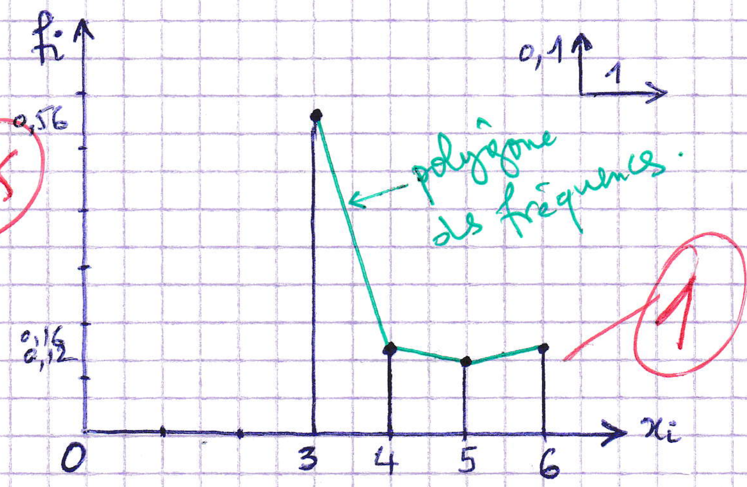
\# Sa nature : Quantitative discrète (0,25)

\# Les modalités : 3, 4, 5, 6 (0,25)

2. Tab. stat. de répartition des étudiants selon le nombre de consultations.

x_i	n_i	f_i	$N_i^\uparrow$	$F_i^\uparrow$	$n_i x_i$
3	14	0,56	14	0,56	42
4	4	0,16	18	0,72	16
5	3	0,12	21	0,84	15
6	4	0,16	25	1	24
Total	25	1	/	/	97

(1,25)



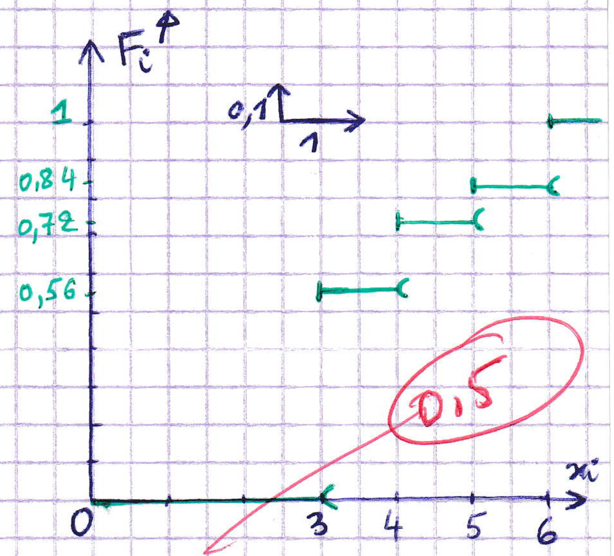
(1)

\# Diagramme en bâtons de répartition des étudiants selon le nbre de consultations

3. La fonction de répartition : (1)

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1].$$

$$x \longmapsto F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 0,56 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,72 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,84 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



(0,5)

- Courbe Cumulative de F -

4. Le mode : $M_o = 3$ (valeur de x_i qui correspond au plus grand effectif.)

0,25

La médiane : $n = 25 = 2p+1$ $(p = 12)$. / $F(M_e) = 0,5$.

$\longrightarrow M_e = x_{(13)} = 3 \Longrightarrow M_e = 3$

0,5

La moyenne arithmétique : $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \frac{1}{25} \times 97 = 3,88$.

$\longrightarrow \overline{X} = 3,88$

0,25

$Q_3 = ?$.

$\frac{3}{4} n = \frac{3 \times 25}{4} = 18,75 \notin \mathbb{N}^*$ / $F(Q_3) = 0,75$.

$\longrightarrow Q_3 = x_{(19)} = 5$. donc $Q_3 = 5$ (Consultations).

0,25

Interprétation de Q_3 :

75 % des étudiants (soit 19 étudiants) ont fait moins de 5 Consultations et 25 % des étudiants (soit 6 étudiants) ont fait plus de 5 consultations.

0,25

5. On a : 18 étudiants ont fait au plus 4 consultations.

donc : $\frac{18}{25} \times 100\% = 72\%$. (c'est la proportion des étudiants ayant fait moins de 4 consultats).

ou encore : $\boxed{F_2(4) = 0,72}$.

0,5

6. Nous avons : $\begin{cases} F(2,5) = 0. \\ F(5,5) = 0,84. \end{cases}$

$F(5,5) - F(2,5) = 0,84 - 0 = 0,84$.

Donc :

$\left. \begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 25 \\ 84\% \longrightarrow Ne \end{array} \right\} \Longrightarrow Ne = \frac{25 \times 84}{100} = 21$.

1,5

Il y a 21 étudiants pour lequels on a observé le nombre de consultations compris entre [2.5, 5.5].

• Exercice 2 : (08 pts) :

1. Tab. stat. de vitesse de véhicules :

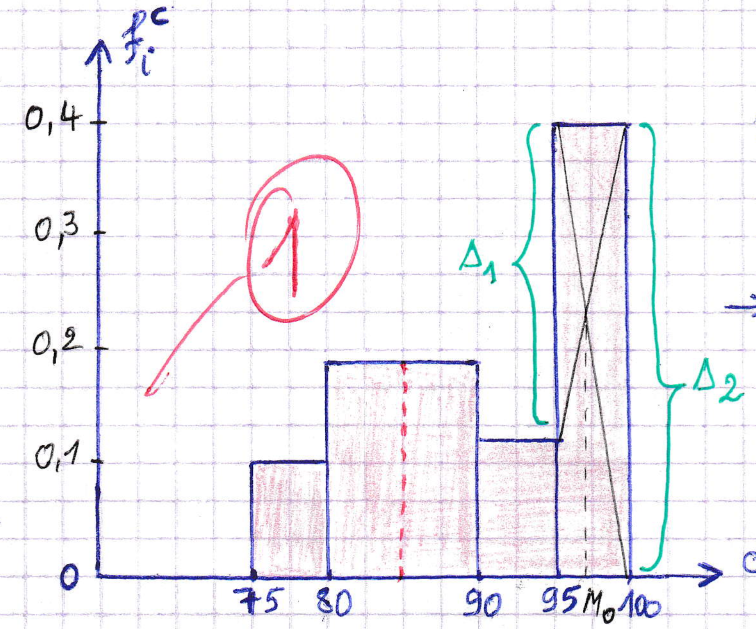
classes	n_i	f_i	a_i	x_i	$F_i^{\uparrow}$	f_i^c	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[75,80[	10	0,1	5	77,5	0,1	0,1	775	60062,5
[80,90[	38	0,38	10	85	0,48	0,19	3230	274550
[90,95[	12	0,12	5	92,5	0,6	0,12	1110	102675
[95,100[	40	0,4	5	97,5	1	0,4	3900	380250
Total :	100	1	/	/	/	/	9015	817537,5

fréquences Corrigées :

$$f_i^c = \frac{f_i}{a_i} \times a$$

où $a = pgcd(5,10) = 5$.

1,25   0,5



\# Histogramme représentatif de la vitesse des Véhicules \#

• le mode :

$M_0 \in [95,100[$: classe modale.

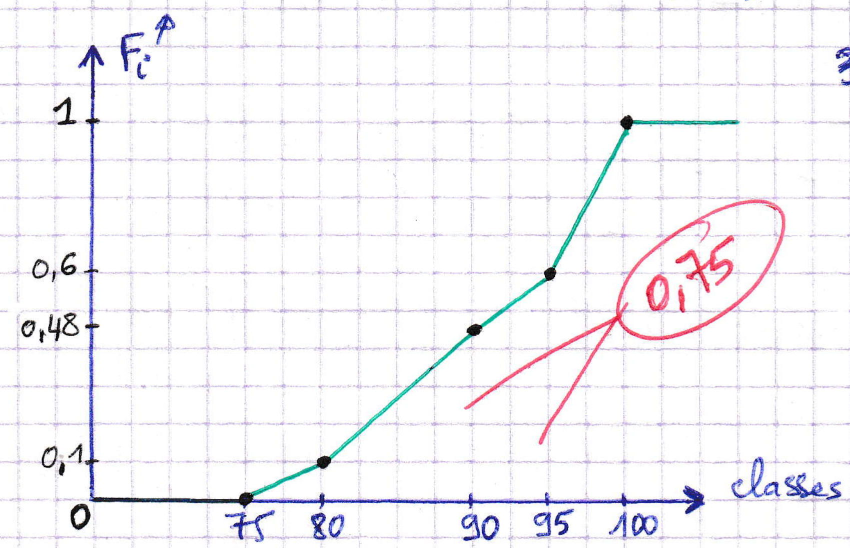
$$\rightarrow M_0 = e_{i-1} + a_i \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$= 95 + 5 \times \frac{(0,4 - 0,12)}{(0,4 - 0,12) + (0,4 - 0)}$$

$$= 95 + 5 \times \frac{0,28}{0,68} = 97,05.$$

Donc : $M_0 = 97,05$ 0,5

2. Courbe Cumulative ↑ des fréquences :



3. La moyenne :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_i x_i$$

$$= \frac{1}{100}(9015) = 90,15.$$

Donc : $\overline{X} = 90,15$ 0,25

\# **La variance :** $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{100}(817537{,}5) - (90{,}15)^2$.

$= \boxed{48{,}36}$ 0,25

4. **L'intervalle interquartile :** 0,25

- $Q_1 \in [80, 90[\ / \ F(Q_1) = 0{,}25$.

$Q_1 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i}(0{,}25 - F(e_{i-1}))$.

$= 80 + \frac{10}{0{,}38}(0{,}25 - 0{,}1) = \boxed{83{,}94}$. 0,5

- $Q_3 \in [95, 100[\ / \ F(Q_3) = 0{,}75$. 0,25

$Q_3 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i}(0{,}75 - F(e_{i-1}))$.

$= 95 + \frac{5}{0{,}4}(0{,}75 - 0{,}6)$.

$= \boxed{96{,}87}$. 0,5

Donc : $Q_3 - Q_1 = 12{,}93$ 0,25

5. **On a :** L'écart type $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{48{,}36} = 6{,}95$. 0,25

$\overline{X} + \sigma_X = 90{,}15 + 6{,}95 = 97{,}1 \in [95, 100[$.

- $F(\overline{X}+\sigma_X) = F(95) + \frac{0{,}4}{5}(97{,}1 - 95) = 0{,}6 + 0{,}168 = 0{,}768$. 1,5

$1 - F(\overline{X}+\sigma_X) = 1 - 0{,}768 = 0{,}232$.

Il y a 23,2 % de véhicules dont la vitesse est supérieure ou égale à $\overline{X} + \sigma_X$.

- **Exercice 3 : (03 pts) :** $E = \{2, 3, 5, 7, 9\}$.

1. Avec les chiffres de E on peut avoir, avec répétition

$cA_n^p = n^p = 5^4 = 625$ (nombres de 4 chiffres). 1

Sans répétition, on peut avoir,

$A_n^p = A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2$.

$= 120$ (nombres de 4 chiffres). 1

2. Le nombre de possibilités d'avoir des nombres inférieurs à 4000 est :

$2 \times 5^3 = 250$. 1