Chapitre 4 : Les modèles ARIMA et la méthodologie de Box & Jenkins

Avant le traitement d'une série chronologique, il convient d'en étudier les caractéristiques stochastiques. Ce chapitre définit les processus stochastiques stationnaires et non stationnaires. Il présente les principaux tests de racine unitaire et décrit les modèles ARMA et ARIMA

I. Etude de la stationnarité

Avant le traitement d'une série chronologique, il convient de s'assurer de la stationnarité des variables retenues car la stationnarité constitue une condition nécessaire pour éviter les régressions fallacieuses, de telles régissions se réalisent lorsque les variables ne sont pas stationnaires, l'estimation des coefficients par la méthode des moindre carrés ordinaires (MCO) ne converge pas vers les vrais coefficients et les tests usuels des **t** de Student et **f** Fisher ne sont plus valides.

Quelques concepts méritent d'être définis.

1.1 La fonction d'autocorrélation (FAC) est la fonction notée ρ_k qui mesure la corrélation de la série avec elle-même décalée de *k* périodes. Sa formulation est la suivante :

$$\rho_k = \frac{cov(y_t\ , y_{t-1})}{\sigma_{yt}\sigma_{yt-k}} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}\ \sqrt{\sum_{t=k+1}^{n}(y_{t-k} - \bar{y})^2}}$$

Cette formule est difficile à manier puisqu'elle exige de recalculer pour chaque terme ρ_k les moyennes et les variances. il lui est préféré d'utiliser la fonction d'autocorrélation d'échantillonnage :

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

La fonction d'autocorrélation partielle (FAP) s'apparente à la notion de corrélation partielle. Le coefficient de corrélation partielle est définie comme étant le calcul de l'influence de x_1 sur x_2 en éliminant les influences des autres variables x_3 , x_4 , . . . , x_k .

Par analogie, nous pouvons définir l'autocorrélation partielle de retard k comme le coefficient de corrélation partielle entre y_t et y_{t-k} , c'est-à-dire comme étant la corrélation entre y_t et y_{t-k} l'influence des autres variables décalées de k périodes (y_{t-1} , y_{t-2} , . . . , y_{t-k+1}) ayant été retirée.

Afin d'éviter par la suite toutes ambiguïtés entre les deux fonctions d'autocorrélation, nous appelons fonction d'autocorrélation simple, la fonction d'autocorrélation.

1.2 Tests de « bruit blanc » et de stationnarité

L'étude de stationnarité s'effectue essentiellement à partir de l'étude des fonctions d'autocorrélation (ou de leur représentation graphique appelée « corrélogramme »). Une série chronologique est stationnaire si elle ne comporte ni tendance ni saisonnalité. Nous allons donc, à partir de l'étude du corrélogramme d'une série, essayer de montrer de quelle manière nous pouvons mettre en évidence ces deux composantes. Différents types de séries stationnaires peuvent être distingués :

- à mémoire, c'est-à-dire dont on peut modéliser, par une loi de reproduction, le processus ;
- identiquement et indépendamment distribuée notée i.i.d. ou appelée Bruit Blanc (« White Noise »);
- normalement (selon une loi normale) et indépendamment distribuée notée n.i.d. ou appelée Bruit Blanc gaussien.

Tests de « bruit blanc » sous eviws

Eviews fournit les résultats des fonctions d'autocorrélation simple (colonne AC) et partielles (colonne PAC), avec les correlogrammes respectifs. Les bornes de l'intervalle de confiance sont stylisées par des pointillés horizontaux ; chaque terme qui sort de cet intervalle est donc significativement différent de zéro au seuil de 5%.

1.3 Série stationnaire

Une série est stationnaire si ses caractéristiques (espérance et variance) se trouvent invariantes dans le temps. Une série pour t=1, ..., t est dite stationnaire si :

- La moyenne est constante et indépendante du temps ; $E(X_t) = E(X_{t+k}) = \mu$
- La variance est définie et indépendante du temps ; $V(X_t) < \infty$
- La covariance est indépendante du temps ;

$$Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$$

Il existe deux types de séries temporelles :

Le bruit blanc est un cas particulier de séries temporelles stochastiques pour lequel la valeur prise par *X* à la date *t* s'écrit :

$$X_t = \varepsilon_t$$

Un processus stochastique X ou (X_t) est un bruit blanc si[1] :

- **$E(X_t) = 0$;** quelque soit t ;
- **$V(X_t) = \sigma_x^2$;** quelque soit t ;
- **$Cov(X_t, X_\Theta) = 0$;** quelque soit $t \neq 0$.

Les principales propriétés d'une série de bruit blanc sont :

- Il n'ya pas de corrélation entre les termes de la série ;
- Les valeurs passées de la série ne permettent pas de prévoir les valeurs futures de la série.

- ✓ **Série marche au hasard (aléatoire)**

C'est un autre cas particulier de processus stochastique pour lequel la valeur prise par la variable Y à la date « t » est régie par l'équation ;

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Où : ε_t est une variable aléatoire qui présente les mêmes propriétés.

1.3 Série non stationnaire

Il existe deux types de processus non stationnaires :

- ✓ **Processus TS (Trend Stationary)**

Il représente une non-stationnarité de nature déterministe. Le processus TS s'écrit :

$$X_t = f(t) + \varepsilon_t$$

[1]DOR E, « *Econométrie* », Pearson Education France, 2009 , p 163.

f : est une fonction polimoniale du temps ;
ε_t : est un processus stationnaire.

- ✓ **Processus DS (Différence Stationary)**

Le processus DS est un processus qu'ont peut rendre stationnaire par l'utilisation de la différenciation :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

On peut définir deux types de processus DS :

- Le processus DS avec dérive (β≠0) s'exprime comme suit :

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

- Le processus DS sans dérive (β= 0) s écrit :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

1.4 Test de racine unitaire

La stationnarité est une condition nécessaire pour l'étude de toute série chronologique dans l'approche classique, car les analyses économétriques ne s'appliquent qu'à des séries stationnaires. Les tests de racine unitaire « *Unit Root Test* » permettent non seulement de détecter l'existence d'une non-stationnarité mais aussi de déterminer de quelle non-stationnarité il s'agit (processus TS ou DS), et donc la bonne méthode pour stationnariser la série.[2]

- **Tests de Dickey-Fuller simples (1979)**

Les tests de Dickey-Fuller (DF) permettent de mettre en évidence le caractère stationnaire ou non d'une chronique par la détermination d'une tendance déterministe ou stochastique. Les modèles servant de base à la construction de ces tests sont au nombre de trois :

Modèle [1] : $\boldsymbol{\Phi_1 X_{t-1}} + \varepsilon_t$ Modèle autorégressif d'ordre 1 ;
Modèle [2] : $\boldsymbol{\Phi_1 X_{t-1} + c} + \varepsilon_t$ Modèle autorégressif avec constante ;
Modèle [3] : $\boldsymbol{\Phi_1 X_{t-1} + c + \beta_t} + \varepsilon_t$ Modèle autorégressif avec tendance.

Le principe des tests est simple : si l'hypothèse H_0 : $\varphi = 1$ est retenue dans l'un de ces trois modèles, le processus est alors non stationnaire[3]. En effet, si l'hypothèse H_0 est vérifiée, la chronique X_t n'est pas stationnaire quel que soit le modèle retenu.

- **Tests de Dickey-Fuller Augmentés**

Dans les modèles précédents, utilisés pour les tests de Dickey-Fuller simple, le processus εt est par hypothèse, un bruit blanc. Or il n'y a aucune raison pour que, à priori, l'erreur soit corrélée ; on appelle tests de Dickey et Fuller Augmentés (ADF, 1981) la prise en compte de cette hypothèse.

Les tests ADF sont fondés, sous l'hypothèse alternative $|\boldsymbol{\Phi}_1| < 1$, sur l'estimation par les MCO des trois modèles :

Modèle [4] : $\Delta \mathbf{X} = \boldsymbol{\rho X_{t-1}} - \sum_{j=2}^{p} \boldsymbol{\Phi_j \Delta X_{t-j+1}} + \varepsilon_t$;

Modèle [5] : $\Delta \mathbf{X} = \boldsymbol{\rho X_{t-1}} - \sum_{j=2}^{p} \boldsymbol{\Phi_j \Delta X_{t-j+1}} + \mathbf{c} + \varepsilon_t$;

Modèle [6] : $\Delta \mathbf{X} = \boldsymbol{\rho X_{t-1}} - \sum_{j=2}^{p} \boldsymbol{\Phi_j \Delta X_{t-j+1}} + \mathbf{c} + \mathbf{b_t} + \varepsilon_t$.

Le test se déroule de manière similaire aux tests DF simples, seules les tables statistiques diffèrent.

Stratégie simplifiée des tests de racine unitaire

[2] BOURBONNAIS Régis (2015), Economertie, 9e édition , *2015,* p 248.
[3] Régis BOURBONNAIS, « économétrie », Dunod, 7ème édition, Paris, 2009, P233.

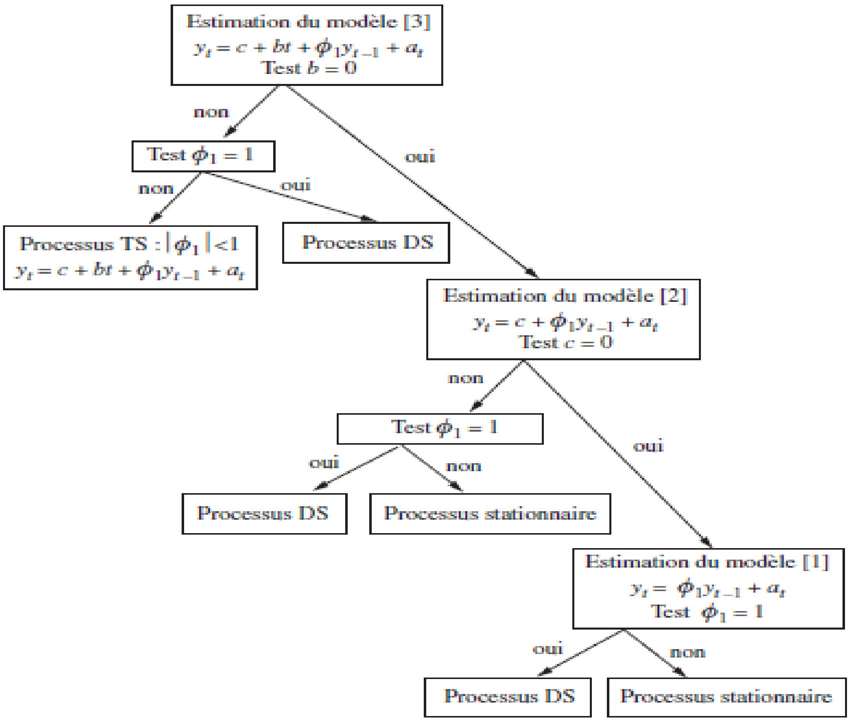

Schéma 1 – Stratégie simplifiée des tests de racine unitaire

Source : BOURBONNAIS Régis (2015), Econometrie, 9e édition , *2015, P251*

II- Le processus ARMA

2.1 Analyse des fonctions d'autocorrélation

L'analyse de la fonction d'autocorrélation d'une série chronologique permet de savoir quels sont les termes ρ_k qui sont significativement différents de 0. En effet, par exemple, si aucun terme n'est significativement différent de 0, on peut en conclure que le processus étudié est sans mémoire et donc qu'à ce titre il n'est affecté ni de tendance ni de saisonnalité. Ou encore si une série mensuelle présente une valeur élevée pour ρ_{12} (corrélation entre y_t et y_{t-12}), la série étudiée est certainement affectée d'un mouvement saisonnier.

Le test d'hypothèses pour un terme ρ_k est le suivant :
H0 : $\rho_k = 0$
H1 : ρ_k =/ 0

Quenouille a démontré que pour un échantillon de taille importante (n > 30) , le coefficient ρ_k tend de manière asymptotique vers une loi normale de moyenne 0 et d'écart type $1/\sqrt{n}$ .L'intervalle de confiance du coefficient ρ_k est alors donné par : $\rho_k = 0 \pm t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Si le coefficient calculé $\hat{\rho}_k$ est à l'extérieur de cet intervalle de confiance, il est significativement différent de 0 au seuil α (en général $\alpha = 0,05$ et $t^{\alpha/2} = 1,96$). La plupart des logiciels fournissent, avec le corrélogramme, l'intervalle de confiance, ce qui autorise une interprétation instantanée.

Dans le cas où le corrélogramme ne laisse apparaître aucune décroissance de ses termes (absence de « cut off »), nous pouvons en conclure que la série n'est pas stationnaire en tendance.

2.2 Statistiques de Box-Pierce et Ljung-Box

Le test de Box-Pierce permet d'identifier les processus sans mémoire (suite de variables aléatoires indépendantes entre elles). La $cov(y_t , y_{t-1}) = 0$ doit être identifiée (ou encore $\rho_k = 0\ \forall k$.

Un processus de bruit blanc implique que $\rho_1 = \rho_2 = . . . = \rho_h = 0$, soit les hypothèses :

H0 : $\rho_1 = \rho_2 = . . . = \rho_h = 0$

H1 : il existe au moins un ρi significativement différent de 0.
Pour effectuer ce test, on recourt à la statistique Q (due à Box-Pierce1) qui est donnée par :

$$Q = n \sum_{k=1}^{h} \hat{\rho}_k^2$$

h = nombre de retards, $\hat{\rho}_k^2$ = autocorrélation empirique d'ordre k, n = nombre d'observations. La statistique Q est distribuée de manière asymptotique comme un χ2 (chi deux) à h degrés de liberté. L'hypothèse de bruit blanc est rejetée, au seuil α, si la statistique Q est supérieure au χ2 lu dans la table au seuil (1 − α) et h degrés de liberté.

Une autre statistique peut aussi etre utilisée, dont les propriétés asymptotiques sont meilleures, dérivée de la première qui est le Q′ de Ljung et Box 2 :

$$Q' = n\ (n + 2) \sum_{k=1}^{h} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k}$$

qui est distribuée selon un χ2 à h degrés de liberté et dont les règles de décisions sont identiques au précédent. Ces tests sont appelés par les anglosaxons : « portmanteau test ».[4]

2.3 Typologie des modèles AR, MA et ARMA

Il sera présenté les processus autorégressifs et les processus de moyenne mobile.

1) Modèle AR (Auto Régressif)

Les processus autorégressifs peuvent s'écrire comme la somme d'une constante, de la valeur courante d'un bruit blanc et d'une combinaison linéaire finie de leurs valeurs passées. Un processus stochastique {Xt} est dit autorégressif d'ordre p, et noté AR(p) ou ARMA (p, 0), si : $\forall t : X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdot\cdot\cdot + \phi_p X_{t-p} + a_t$ où le processus stochastique $\{a_t\}$ est un bruit blanc.

Dans le processus autorégressif d'ordre p, l'observation présente y_t est générée par une moyenne pondérée des observations passées jusqu'à la p-ième période sous la forme suivante :

AR(1) : $y_t = \theta_1\ y_{t-1} + \varepsilon_t$
AR(2) : $y_t = \theta_1\ y_{t-1} + \theta 2\ y_{t-2} + \varepsilon_t$

AR(p) : $y_t = \theta_1\ y_{t-1} + \theta 2\ y_{t-2} + . . . + \theta p\ y_{t-p} + \varepsilon t$ ….[4]
où $\theta_1,\theta_2,. . . ,\theta_p$ sont des paramètres à estimer positifs ou négatifs, ε_t est un aléa gaussien.
Nous pouvons ajouter à ce processus une constante qui ne modifie en rien les propriétés

[4] Bourbonnais Régis « *économétrie* : cours et exercices corrigés», 9emeédition Dunod, Paris, 2015.

stochastiques. L'équation [4] peut aussi s'écrire à l'aide de l'opérateur décalage D :
$(1 - \theta_1 D - \theta_2 D_2 - . . . - \theta_p D p)y_t = \varepsilon_t$

Il est démontré que le corrélogramme simple d'un processus AR(p) est caractérisé par une décroissance géométrique de ses termes de type : $\rho_k = \rho^k$

Le corrélogramme partiel a ses seuls p premiers termes différents de 0.

2) Modèle MA (Moving Average : Moyenne Mobile)
Dans le processus de moyenne mobile d'ordre q, chaque observation y_t est générée par une moyenne pondérée d'aléas jusqu'à la q-ième période.
MA(1) : $y_t = \varepsilon_t - \alpha_1\varepsilon_{t-1}$
MA(2) : $y_t = \varepsilon_t - \alpha_1\varepsilon_{t-1} - \alpha_2\varepsilon_{t-2}$
. . .
MA(q) : $yt = \varepsilon t - \alpha 1\varepsilon t-1 - \alpha 2\varepsilon t-2 - . . . - \alpha q\ \varepsilon t-q$
où $\alpha_1,\alpha_2,. . . ,\alpha_q$ sont des paramètres pouvant être positifs ou négatifs et εt est un aléa gaussien.
L'équation [5] peut aussi s'écrire :
$(1 - \alpha_1 D - \alpha_2 D_2 - . . . - \alpha q\ D\ q)\varepsilon t = yt$.

Dans ce processus, tout comme dans le modèle autorégressif AR, les aléas sont supposés être engendrés par un processus de type bruit blanc. Le modèle MA est interprété comme étant représentatif d'une série chronologique fluctuant autour de sa moyenne de manière aléatoire, d'où le terme de moyenne mobile car celle-ci, en lissant la série, gomme le bruit créé par l'aléa.

Il est à noter qu'il y a équivalence entre un processus MA(1) et un processus AR d'ordre p infini : MA(1) = AR(∞).

Le corrélogramme simple d'un processus MA(q) est de la forme générale :

$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{i=q-k} \alpha_i\alpha_{i+k}}{\sum_{i=0}^{i=q} \alpha_i^2}$ pour k = 0,1,. . . ,q et $\rho_k = 0$ pour k > q.

C'est-à-dire que seuls les q premiers termes du corrélogramme simple sont significativement différents de 0.

Le corrélogramme partiel est caractérisé par une décroissance géométrique des retards.

3) Modèle ARMA (mélange de processus AR et MA)

Les modèles ARMA sont représentatifs d'un processus généré par une combinaison des valeurs passées et des erreurs passées. Ils sont définis par l'équation :[5]

$$ARMA_{(p,q)} = \left(1 - \theta_1 D - \theta_2 D^2 - \cdots \theta_p D^p\right) y_t$$
$$= \left(1 - \alpha_1 D - \alpha_2 D^2 - \dots \alpha_p D^p\right) \varepsilon_t$$

Nous avons :
ARMA(1,0) = AR(1); ARMA(0,1) = MA(1).
Dans le cas d'un processus ARMA (p, q) avec constante :

[5] Bourbonnais Régis « *économétrie* : cours et exercices corrigés», 9emeédition Dunod, Paris, 2015.

$$y_t = \mu + \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \cdots - \cdots \theta_p x_{t-P} + \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots . -\alpha_q \varepsilon_{t-q}$$

L'espérance du processus est donnée par :

$$E(x_t) = \frac{\mu}{1 - \theta_1 - \theta_2 - \cdots \theta_p}$$

Donc connaissant l'espérance du processus, la constante du processus ARMA est déterminée par :$\mu = E(x_t)\,(1 - \theta_1 - \theta_2 - \cdots \theta_p)$

Les corrélogrammes simples et partiels sont, par voie de conséquence, un mélange des deux corrélogrammes des processus AR et MA purs. Il s'avère ainsi plus délicat d'identifier ces processus à partir de l'étude des fonctions d'autocorrélation empiriques.

III- La méthode de Box et Jenkins

La partie autorégressive d'un processus, notée AR, est constituée par une combinaison linéaire finie des valeurs passées du processus. La partie moyenne mobile, notée MA, est constituée d'une combinaison linéaire finie en *t* des valeurs passées d'un bruit blanc. Wold (1954) montre que les modèles ARMA permettent de représenter la plupart des processus stationnaires. L'approche de Box et Jenkins (1976) consiste en une méthodologie d'étude systématique des séries chronologiques à partir de leurs caractéristiques afin de déterminer, dans la famille des modèles ARIMA, le plus adapté à représenter le phénomène étudié. Trois étapes principales sont définies.[6]

A. Recherche de la représentation adéquate : l'identification.

La phase d'identification consiste à déterminer le modèle adéquat dans la famille des modèles ARIMA. Elle est fondée sur l'étude des corrélogrammes simple et partiel.

1) Désaisonnalisation.

Dans le cas d'une série affectée d'un mouvement saisonnier, il convient de la retirer préalablement à tout traitement statistique. Cette saisonnalité est ajoutée à la série prévue à la fin du traitement afin d'obtenir une prévision en terme brut.

2) Recherche de la stationnarité en terme de tendance.

Si l'étude du corrélogramme simple et les tests statistiques s'y rapportant (statistique Q) présagent d'une série affectée d'une tendance, il convient d'en étudier les caractéristiques selon les tests de Dickey-Fuller. La méthode d'élimination de la tendance est fonction du processus DS ou TS sous-jacent à la chronique étudiée.

Après stationnarisation, les valeurs des paramètres p, q peuvent être identifiés du modèle ARMA.

- Si le corrélogramme simple n'a que ses q premiers termes (q = 3 maximum) différents de 0 et que les termes du corrélogramme partiel diminuent lentement, nous pouvons pronostiquer un MA(q) .
- Si le corrélogramme partiel n'a que ses p premiers termes (p = 3 maximum) différents de 0 et que les termes du corrélogramme simple diminuent lentement, cela caractérise un AR(p) .
- Si les fonctions d'autocorrélation simple et partiel ne paraissent pas tronquées, il s'agit alors d'un processus de type ARMA, dont les paramètres dépendent de la forme particulière des corrélogrammes

---

[6] Bourbonnais Régis « *économétrie* : cours et exercices corrigés», 9[eme]édition Dunod, Paris, 2015.

B. Estimation des paramètres

Les méthodes d'estimation diffèrent selon le type de processus diagnostiqué. Dans le cas d'un modèle AR(p), une méthode des moindres carrés est appliquée ou bien les relations existantes entre les autocorrélations et les coefficients du modèle (équations de Yule Walker) seront utilisées. L'estimation des paramètres d'un modèle MA(q) s'avère plus complexe. Box et Jenkins suggèrent d'utiliser une procédure itérative de type balayage.

C. Tests d'adéquation du modèle et prévision

Les paramètres du modèle étant estimés, les résultats d'estimation suivant seront examinés.
• Les coefficients du modèle doivent être significativement différents de 0 (le test du t de Student s'applique de manière classique). Si un coefficient n'est pas significativement différent de 0, il convient d'envisager une nouvelle spécification éliminant l'ordre du modèle AR ou MA non valide.
• L'analyse des résidus : si les résidus obéissent à un bruit blanc, il ne doit pas exister d'autocorrélation dans la série et les résidus doivent être homoscédastiques.
Les tests suivants peuvent être utilisés :[7]

- le test de Durbin Watson,
- les tests de Box et Pierce et de Ljung et Box permettent de tester l'ensemble des termes de la fonction d'autocorrélation. Si le résidu est à mémoire, cela signifie que la spécification du modèle est incomplète et qu'il convient d'ajouter au moins un ordre au processus ;
- le test ARCH d'hétéroscédasticité effectué à partir de la fonction d'autocorrélation du résidu au carré.

La phase de validation du modèle est très importante et nécessite le plus souvent un retour à la phase d'identification. Lorsque le modèle est validé, la prévision peut alors être calculée à un horizon de quelques périodes, limitées car la variance de l'erreur de prévision croît très vite avec l'horizon.

La méthodologie de Box & Jenkins vise à formuler un modèle permettant de représenter une chronique avec comme finalité de prévoir des valeurs futures. De ce fait, l'objet de cette méthodologie est de modéliser une série temporelle en fonction de ses valeurs passées et présentes afin de déterminer le processus ARIMA adéquat par principe de parcimonie. Cette méthodologie suggère une procédure à trois étapes : Identification du modèle ; Estimation du modèle ; et Validation du modèle (Test de diagnostique).

L'application de la méthode de Box & Jenkins sur les séries chronologiques est illustrée dans le polycopié de cours de F. Abderrahmani (2018)[8].

---

[7] Bourbonnais Régis « *économétrie* : cours et exercices corrigés», 9[eme]édition Dunod, Paris, 2015.

[8] ABDERRAHMANI F, (2018) « Guide pratique des séries temporelles macro-économiques et financières avec eviews 9.5 », *polycopié de cours à caractère pédagogique*, université de Bejaia.