

TP 1. Méthode de dichotomie pour la résolution d'une équation non linéaire

1. But du TP

L'objectif de ce TP est d'implémenter sur Matlab l'algorithme de la méthode de dichotomie pour la résolution d'une équation non linéaire :

$$F(x) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

2. Rappels sur la méthode de dichotomie

Considérons le problème (1), et supposons que F est continue et monotone sur $[a, b]$, et $F(a) \times F(b) \leq 0$, alors $\exists ! \alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$.

La méthode de bisection consiste à déterminer une suite d'intervalles $I_n = [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ contenant α telle que la longueur de I_{n+1} soit la moitié de I_n . On procède de cette façon, on divise l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles $[a, x_1]$ et $[x_1, b]$ égaux en longueur car nous posons $x_1 = \frac{a+b}{2}$. La racine α appartient à l'un des deux intervalles. Pour savoir lequel, il suffit d'utiliser les conditions suivantes

- Si $F(a) \times F(x_1) \leq 0$, alors $\alpha \in [a, x_1]$;
- Si $F(b) \times F(x_1) \leq 0$, alors $\alpha \in [x_1, b]$;

En faisant n itérations par la méthode de dichotomie on obtient une suite d'approximations de $\alpha : x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, n = 1, 2, \dots$ qui vérifient cette $|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$. Pour une tolérance ε donnée, arrêter à la nième itération lorsque $|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$.

3. Algorithme de la méthode de dichotomie

Données : ε et F

Initialisation : $a_1 = a ; b_1 = b ; I_1 = [a_1, b_1]$; $n = 1$;

Tant que $\frac{b_n - a_n}{2} > \varepsilon$, alors

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Si $F(a_n) \times F(x_n) \leq 0$, alors

$$a_{n+1} = a_n;$$

$$b_{n+1} = x_n;$$

Sinon

$$a_{n+1} = x_n;$$

$$b_{n+1} = b_n;$$

Fin si

$$n = n + 1;$$

Fin tant que

4. Travail demandé

Soit à résoudre l'équation suivante

$$F(x) = 2x^3 - 10x^2 - 24x + 72, \quad x \in [-1, 4] \quad (2)$$

- Tracer le graphe de la fonction F pour $x \in [-10, 10]$.
- Combien l'équation $F(x) = 0$ admet-elle de solutions quand $x \in [-10, 10]$.
- A partir de graphe, l'équation (2) admet-elle une solution ? si oui est-elle unique ?
- Donner à l'aide de graphe une approximation de la solution de (2).
- Ecrire un script permettant de déterminer la solution de (2) à l'aide de la méthode de dichotomie pour $\varepsilon = 10^{-2}$; $\varepsilon = 10^{-6}$ et $\varepsilon = 10^{-9}$.
- Quelle est la relation entre ε et le nombre d'itérations n ?