Université Abderrahmane-MIRA de Bejaia

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département d'Informatique

Module : Modélisation et Evaluation des Performances

Spécialité : Intelligence Artificielle

Chapitre II : Rappel sur le Calcul des Probablités

Présenté par : Dr. Mohand YAZID

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

1. Probabilités

Définition

Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle **Probabilités** sur Ω toute application $\mathbb{P}$ de l'ensemble des événements $\rho(\Omega)$ dans l'intervalle **[0,1]** satisfaisant les deux conditions suivantes:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. $\forall(A_1, A_2)$ un couple d'événements incompatibles :
   $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.

- Ω représente l'ensemble des **réalisations possibles** d'une expérience aléatoire donnée. Les éléments de Ω sont notés w_i.
- $\rho(\Omega)$ représente (mathématiquement parlant) l'ensemble des **parties** de Ω, i.e., l'ensemble des événements possibles qui peuvent se produire sur Ω.
- $\rho(\Omega)$ inclut systématiquement l'ensemble vide (noté ϕ) et Ω. ϕ et Ω sont respectivement appelés **événement impossible** et **événement certain** de $\rho(\Omega)$. Les événements de $\rho(\Omega)$ sont notés A_i.

1. Probabilités

Propriété 1

$\sum_{w_i \in \Omega} \mathbb{P}(w_i) = 1.$

Propriété 2

Soit A_i un événement:

1. $\mathbb{P}(A_i) \in [0, 1]$,
2. $\mathbb{P}(\phi) = 0$.

Exemple 1.1 : Jet d'une pièce de monnaie

L'expérience aléatoire "jet d'une pièce de monnaie" retourne l'un des résultats suivants: **Pile** (P) ou **Face** (F).

- $\Omega = \{P, F\}$.
- $\rho(\Omega) = \{\phi, \{P\}, \{F\}, \Omega\}$.
- $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = 1/2$.

1. Probabilités

Exemple 1.2 : Jet d'un dé

L'expérience aléatoire "jet d'un dé" retourne l'un des résultats suivants: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, ou **6**.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $\rho(\Omega) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \cdots, \{1, 2, 3\}, \cdots, \{1, 2, 3, 4\}, \cdots, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \cdots, \Omega\}$.
- $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = 1/6$.
- $\sum_{i=1}^{6} = \mathbb{P}(i) = 1$

Exemple 1.3 : Jet de deux pièces de monnaie

- $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.
- $\rho(\Omega) = \{\phi, \{(P, P)\}, \{(P, F)\}, \{(F, P)\}, \{(F, F)\}, \cdots, \Omega\}$.
- $\mathbb{P}(P, P) = \mathbb{P}(P, F) = \mathbb{P}(F, P) = \mathbb{P}(F, F) = 1/4$.

2. Variables Aléatoires Discrètes

Définition

Soit Ω un ensemble fini non vide muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On appelle variable aléatoire discrète toute **fonction numérique** X définie sur Ω dans un ensemble fini ou dénombrable.

Exemple 2.1

Reprenons l'exemple 1.3 sur les probabilités. Soit X une variable aléatoire discrète qui **associe** à chaque élément w_i de l'ensemble Ω le nombre x_i de faces réalisées. Nous obtenons donc:

- Pour $w_1 = (P, P)$, $x_1 = X(w_1) = 0$,
- Pour $w_2 = (P, F)$, $x_2 = X(w_2) = 1$,
- Pour $w_3 = (F, P)$, $x_3 = X(w_3) = 1$,
- Pour $w_4 = (F, F)$, $x_4 = X(w_4) = 2$.

L'ensemble des valeurs x_i prises par la variable aléatoire X est le suivant: $\{0, 1, 2\}$.

3. Loi d'une Variable Aléatoire Discrète

Définition

- Soient Ω un ensemble fini non vide muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, X une variable aléatoire discrète définie sur Ω, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les éléments de l'image de Ω par X. On suppose que : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
- La fonction numérique **P** définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$ par la formule ci-dessous s'appelle **loi** ou **distribution** de la variable aléatoire X.

$$\mathbf{P}(x_i) = p_i = \mathbb{P}\left[X^{-1}(x_i)\right]. \tag{1}$$

3. Loi d'une Variable Aléatoire Discrète

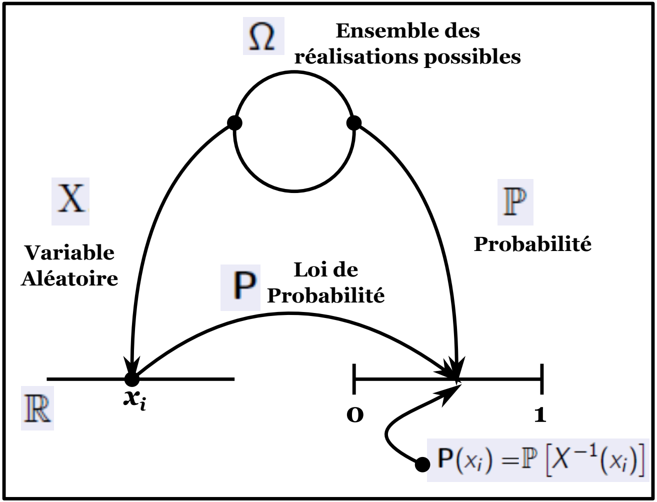

Figure: Relation entre Probabilité, Variable Aléatoire Discrète, et Loi de Probabilité.

3. Loi d'une Variable Aléatoire Discrète

Propriétés d'une Loi de Probabilités **P**

- $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(x_i) \in [0, 1]$.
- $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i) = 1$.
- On note $\mathbf{P}(X = x_i)$ la probabilité que la variable aléatoire X soit égale à x_i.

Exemple 3.1

Reprenons l'exemple 2.1 sur les variables aléatoires discrètes. La variable aléatoire $X = \{0, 1, 2\}$ représente le nombre de faces réalisées dans l'expérience aléatoire "jet de deux pièces de monnaies". La loi de probabilité **P** de la variable aléatoire X (ou les probabilités p_i de réalisation des valeurs x_i de la variable aléatoire X) est déterminée comme suivant:

- Pour $x_1 = 0$, $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left[X^{-1}(0)\right] = \mathbb{P}(w_1) = \mathbb{P}(P, P) = 1/4$.
- Pour $x_2 = 1$, $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbb{P}\left[X^{-1}(1)\right] = \mathbb{P}(w_2) + \mathbb{P}(w_3) = \mathbb{P}(P, F) + \mathbb{P}(F, P) = 1/4 + 1/4 = 1/2$.
- Pour $x_3 = 2$, $\mathbf{P}(X = 2) = \mathbb{P}\left[X^{-1}(2)\right] = \mathbb{P}(w_4) = \mathbb{P}(F, F) = 1/4$.

4. Fonction de répartition d'une Variable Aléatoire Discrète

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète qui suit la loi de probabilité $\mathbf{P}$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique positive F définie sur $\mathbb{R}^+$ par la formule suivante:

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbf{P}(x_i). \quad (2)$$

5. Valeurs Typiques d'une Variable Aléatoire Discrète

Définition

- Soient X une variable aléatoire discrète qui suit la loi de probabilité $\mathbf{P}$, et r un entier positif non nul.
- On appelle **moment d'ordre** r de la variable aléatoire X, et on le note $M_r(X)$, la somme suivante:

$$M_r(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \times \mathbf{P}(x_i). \tag{3}$$

- Le moment d'ordre 1 de X s'appelle la **moyenne** ou **espérance mathématique** de X. Il est noté $E(X)$.
- Le moment d'ordre 2 de X s'appelle la **variance** de X. Il est noté $Var(X)$.

6. Loi de Poisson

Définition

Soient X une variable aléatoire discrète, et λ un nombre réel strictement positif. L'application qui à toute **valeur entière** x de la variable aléatoire X associe la probabilité définie par la formule ci-dessous est dite **loi de Poisson de paramètre** λ de la variable aléatoire X. Elle est notée $\mathcal{P}(\lambda)$. $E(X) = Var(X) = \lambda$.

$$\mathcal{P}(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!}. \tag{4}$$

7. Variables Aléatoires Continues

Définition

- Soient X une variable aléatoire continue et F sa fonction de répartition. La fonction F est définie comme suivant:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{5}$$

- $f(x)$ est appelée fonction densité de probabilité de la variable X.

8. Loi Exponentielle

Définition

- Soit μ un nombre réel strictement positif, on appelle **loi Exponentielle de paramètre** μ, et on la note $\mathcal{E}(\mu)$, la loi d'une variable aléatoire X admettant une densité de probabilité définie par les formules suivantes:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \mu \times e^{-\mu x} & x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- La fonction de répartition de X est définie comme suivant:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\mu x} & x \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

- $E(X) = 1/\mu$ et $Var(X) = 1/\mu^2$

9. Propriété Sans Mémoire de la Loi Exponentielle

Propriété Sans Mémoire (Markov)

- Considérons la durée de bon fonctionnement X d'un dispositif technique, et admettant que X suit une loi exponentielle de densité $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, où $x \geq 0$ et μ est un paramètre positif.
- La loi exponentielle est sans mémoire car:

$$\mathbf{P}(X > x + t | X > t) = \mathbf{P}(X > x) = e^{-\mu x}. \tag{8}$$

- Ceci signifie que la probabilité de bon fonctionnement pendant l'intervalle $[t, t + x]$ ne dépend que de x.
- La loi exponentielle est la seule loi continue qui possède cette propriété.

10. Processus Stochastiques

Définition

- Un processus stochastique est une **famille de variables aléatoires** $X(t)$ à valeurs réelles, où t est un paramètre réel.
- l'espace des paramètres ou **espace du temps** T prendra l'une des deux formes suivantes:
  1. $T = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$: on parlera alors de **processus stochastique à temps discret** et on écrira X_n au lieu de $X(t)$.
  2. $T = [0, \infty[$: on dira alors que $\{X(t), t \geq 0\}$ est un **processus stochastique à temps continu**.
- Si $X(t) = x$, on dira que le processus est à l'instant t dans l'état x.
- On désigne par l'espace des états, l'ensemble S des valeurs prises par toutes les variables aléatoires d'un processus stochastique.
  1. Si S est un ensemble discret, X est dit **chaîne stochastique**.
  2. Si S vérifie la propriété de Markov, X est dit **chaîne de Markov**.