Université Abderrahmane-MIRA de Bejaia

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département d'Informatique

Module : Modélisation et Evaluation des Performances

Spécialité : Intelligence Artificielle

Chapitre III : Chaînes de Markov à Temps Discret

Présenté par : Dr. Mohand YAZID

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

1. Introduction
2. Définitions
   - Chaînes de Markov à Temps Discret
   - Matrice de Transition et Graphe des Transitions

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

PLAN DU CHAPITRE

1 Introduction

2 Définitions
- Chaînes de Markov à Temps Discret
- Matrice de Transition et Graphe des Transitions

3 Propriétés Fondamentales
- Probabilités de Transition à n Étapes
- Loi de Probabilités de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- Exercice d'Application 1

4 Comportement Asymptotique
- Régime Transitoire et Régime Permanent
- Distribution Stationnaire
- Existence et Unicité des Distributions Stationnaires
- Exercice d'Application 2

1. Introduction

Introduction

- Nous allons étudier dans ce chapitre une classe de processus stochastiques **à temps discret**.
- Nous considérons pour cela une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'espace des états S **est discret**.
- Nous supposons que l'on connaît, pour chaque paire d'états (i,j) et pour chaque instant n, la probabilité $P_{i,j}(n)$ que le processus soit dans j à l'instant $n+1$ étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant n:

$$P_{i,j}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (1)$$

1. Introduction

Exemple 1.1

- Une unité de production comprend **deux** machines automatiques qui fonctionnement indépendamment l'une de l'autre.
- Chaque machine a la fiabilité **p** au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est égale à **1-p**. Dans ce cas elle sera réparée pendant la **nuit** et se retrouvera en état de marche le **lendemain**. **Une seule** machine peut être réparée à la fois.
- Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le nombre de machines **en panne** en début de la **nième** journée.

1. Introduction

Solution 1.1

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus stochastique à temps discret et à deux états **0** et **1**.
- En utilisant les méthodes élémentaires de calcul des probabilités, on établit que :
  1. $P_{00}(n) = p^2 + 2p(1-p) = p(2-p)$.
  2. $P_{01}(n) = (1-p)^2$.
  3. $P_{10}(n) = p$.
  4. $P_{11}(n) = 1-p$.
- Les probabilités de transitions sont donc indépendantes du temps:

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}, P_{i,j}(n) = P_{i,j}. \tag{2}$$

- Nous avons clairement :

$$P_{00} + P_{01} = P_{10} + P_{11} = 1. \tag{3}$$

- Nous avons admis ci-dessous l'existence des probabilités de transition $P_{i,j}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, $\forall i, j \in S$.
- Ceci signifie implicitement que ces probabilités conditionnelles ne dépendent pas du comportement du processus antérieur à l'instant n.
- Pour le problème précédent des deux machines, on vérifie en effet que l'on a par exemple :

$$\begin{aligned} P_{01}(n) &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0, X_{n-1} = 1), \\ &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0, X_{n-1} = 0), \\ &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0). \end{aligned} \tag{4}$$

2. Définitions

2.1. Chaînes de Markov à Temps Discret

- D'autre part, il est évident qu'une telle condition n'est pas satisfaite pour n'importe qu'elle suite de variables aléatoires $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$.
- La classe des processus étudiés ici est donc caractérisée par la propriété que l'état **présent** du processus (son état à l'instant n) résume toute l'information utile pour connaître son évolution **futur**.
- Cette propriété fondamentale est connue sous le nom de propriété de **Markov**, $\forall n \geq 0$ et $\forall j, i_n, i_{n-1}, \cdots, i_1, i_0 \in S$:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} | X_n = i_n). \tag{5}$$

2. Définitions

2.2. Matrice de Transition et Graphe des Transitions

- On peut présenter les probabilités conditionnelles P_{ij} sous forme **matricielle** ou sous forme de **graphe**.
- La matrice des probabilités de transition ou matrice de transition $(P_{ij}) = \mathcal{P}$ possède les propriétés suivantes :
  1. Tous les termes sont **positifs ou nulls**,
  2. La **somme** des termes de chaque ligne égale à **1**.
- Quant au graphe des transitions, il es formé de **points** représentant les **états** du processus et d'**arcs** correspondant aux **transitions** possibles, pour lesquelles les probabilités P_{ij} sont **positives**.

2. Définitions

2.2. Matrice de Transition et Graphe des Transitions

- Pour l'exemple 1.1, nous avons :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

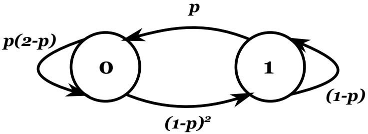


Figure: Graphe des transitions.

3. Propriétés Fondamentales

3.1. Probabilités de Transition à n Étapes

- Soit $P_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes, nous avons $\forall n \geq 1$ et $\forall k \geq 1$:

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) = P(X_{n+k} = j | X_k = i). \tag{6}$$

- Pour $n = 1$, $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$.
- Pour calculer $P_{ij}^{(n)}$, remarquons que :

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i), \\ &= \sum_{k \in S} P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i), n \geq 2, \\ &= \sum_{k \in S} P(X_n = j | X_{n-1} = k) \times P(X_{n-1} = k | X_0 = i), \\ &= \sum_{k \in S} P_{kj}^{(1)} \times P_{ik}^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

- On note $\mathcal{P}^{(n)}$ la matrice de transition à n étapes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(n)} &= \left(P_{ij}^{(n)}\right), \\
&= \mathcal{P} \times \mathcal{P}^{(n-1)}, \\
&= \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^{(n-2)}, \\
\vdots \ &\ \ \vdots \\
&= \mathcal{P}^n. \qquad (8)
\end{aligned}$$

3. Propriétés Fondamentales

3.2. Loi de Probabilités de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- Nous introduisons maintenant les probabilités d'états, nous avons $\forall n \geq 0$, et $\forall k \in S$:

$$\pi_k^{(n)} = P(X_n = k). \tag{9}$$

- La distribution de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ peut être alors écrite sous forme vecteur-ligne ci-dessous dont la somme des termes vaut 1.

$$\Pi^{(n)} = \left[\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \cdots\right]. \tag{10}$$

- Pour calculer $\Pi^{(n)}$, il faut connaître soit la valeur par X_0, i.e., l'état initial du processus, soit sa distribution initiale $\Pi^{(0)}$:

$$\pi_k^{(n)} = \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} \times P_{ik}^{(n)}. \tag{11}$$

- En notation matricielle :

$$\Pi^{(n)} = \Pi^{(0)} \times \mathcal{P}^n. \tag{12}$$

- De façon analogue, nous obtenons :

$$\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times \mathcal{P}. \tag{13}$$

- Reprenons l'exemple 1.1 et admettons que les deux machines se trouvent initialement en état de fonctionnement :

$$\Pi^{(0)} = [1, 0]. \tag{14}$$

- La distribution de X_1 est alors :

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= \Pi^{(0)} \times \mathcal{P}, \\ &= [1, 0] \times \begin{bmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{bmatrix}, \\ &= \left[p(2-p), (1-p)^2\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

3. Propriétés Fondamentales

3.2. Exercice d'Application 1

Une sonde en orbite autour de la planète Saturne est équipée de trois appareils photos haute résolution identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et ayant chacun la probabilité p de tomber en panne au cours d'une année. Quand un appareil est en panne, il ne peut pas être réparé. Soit $\{X_n\}_{n \in N}$ le processus stochastique modélisant le nombre d'appareils photos en panne au début d'une année.

1. Pour n compris entre 0 et 8, tracer une trajectoire possible qui englobe l'ensemble des états S du processus $\{X_n\}_{n \in N}$. Pour chaque instant n, préciser les états possibles et encercler l'état choisi.
2. Déterminer les probabilités de transition non nulles du processus $\{X_n\}_{n \in N}$.
3. Un an donné, les trois appareils photos fonctionnent correctement. Quelle est la probabilité que la sonde continue d'envoyer des photos 2 ans après, en supposant que $p = 1/2$?

4. Comportement Asymptotique

4.1. Régime Transitoire et Régime Permanent

- Le but de la section précédente était d'exprimer les probabilités d'états $\pi_k^{(n)} = P(X_n = k)$ d'une chaîne de Markov en fonction du nombre n de transitions.
- En d'autres termes, ceci revient à étudier le régime transitoire du phénomène aléatoire en question. Il est evident que la distribution de X_n varie généralement en fonction du temps et qu'elle dépend de la distribution initiale $\Pi^{(0)}$.
- D'autre part, on constate souvent que la distribution $\Pi^{(n)}$ converge vers une distribution limite quand $n \to \infty$. Si tel est le cas, cette dernière définit le régime permanent du processus stochastique.
- Contrairement au régime transitoire, le régime permanent n'est pas influencé par le choix de la distribution initiale.
- En termes formels, on dit qu'une chaîne de Markov converge vers Π ou possède une distribution limite Π si :

$$lim_{n\to\infty}\Pi^{(n)} = \Pi. \tag{16}$$

- Une distribution de probabilité discrète $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \cdots]$ est appelée stationnaire par rapport à une matrice stochastique $\mathcal{P}$ si :

$$\Pi = \Pi \times \mathcal{P}. \tag{17}$$

- Une chaîne de Markov est dite stationnaire si la distribution $\Pi^{(n)}$ de la variable aléatoire X_n est indépendante du temps $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.
- Pour calculer les composantes d'un vecteur-ligne stationnaire $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \cdots]$ d'une chaîne de Markov, on résout le système d'équations linéaires formé de :

$$\begin{cases} \Pi = \Pi \times \mathcal{P}, \\ \sum_{k \in S} \pi_k = 1. \end{cases} \tag{18}$$

4. Comportement Asymptotique

4.2. Distribution Stationnaire

Exemple 4.1

Considérons la chaîne de Markov définie par :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi = \Pi \times \mathcal{P}, \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_k = 1. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\pi_1, \pi_2, \pi_3] = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 1/2\pi_1 + \pi_2 + 1/4\pi_3, \\ \pi_2 = 1/4\pi_3, \\ \pi_3 = 1/2\pi_1 + 1/2\pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \Pi = [4/9, 1/9, 4/9]$$

4. Comportement Asymptotique

4.3. Existence des Distributions Stationnaires

Définition 4.1

Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in S, \exists n \geq 1 : P_{ij}^{(n)} \neq 0. \tag{19}$$

Définition 4.2

- Un état $i \in S$ est dit **périodique** si et seulement si :

$$\exists d > 1, \forall n > 1 \, (n \bmod d = 0) : P_{ii}^{(n)} \neq 0. \tag{20}$$

- La **période** d'un état i est notée $D(i)$:

$$\forall i \in S, D(i) = PGCD\{d > 1, P_{ii}^{(d)} \neq 0\} \tag{21}$$

Définition 4.3

- La période D d'une chaîne de Markov est obtenue comme suivant :

$$D = PGCD\{D(i), \forall i \in S\}. \tag{22}$$

- Une chaîne de Markov est dite **apériodique** si sa période $D = 1$.

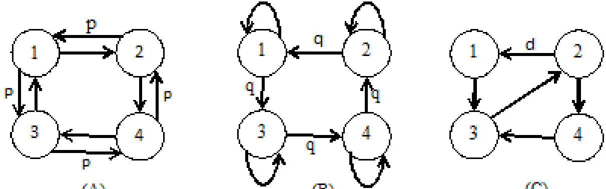
Propriété 4.1

- Une chaîne de Markov irréductible et apériodique est dite **ergodique**.
- Une chaîne de Markov ergodique **admet toujours** une distribution stationnaire.

4. Comportement Asymptotique

4.4. Exercice d'Application 2

Soient $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des chaînes de Markov à temps discret, représentées respectivement par les graphes (A), (B) et (C).



(A) (B) (C)

1. Donner les matrices de transition correspondantes aux chaînes de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Vérifier les deux propriétés d'irréductibilité et de périodicité (en précisant à chaque fois la période) des chaînes de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute valeur p, q et d appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.
3. Déduire les cas pour lesquels les chaînes de Markov$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont ergodiques, et calculer les distributions stationnaires correspondantes à ces différents cas.