Université Abderrahmane Mira de Bejaia - Faculté Technologie
Département d'**A**utomatique, de **T**élécommunications et d'**E**lectronique (ATE)
Niveau : 2ème année Licence Année universitaire : 2022/2023

TP 2. Méthode de point fixe pour la résolution d'une équation non linéaire

1. But du TP

L'objectif de ce TP est d'implémenter sur Matlab l'algorithme de la méthode de point fixe pour la résolution numérique d'une équation non linéaire :

$$F(x)=0, x\in[a,b].(1)$$

2. Rappel du principe de la méthode de point fixe

Supposons que $\exists!\,\alpha\in[a,b]$ tel que $F(\alpha)=0$,le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation (1) en un problème de recherche de point fixe de la fonction g. Les deux problèmes sont équivalents c.-à-d. :

$$F(x)=0, x\in[a,b]\Longleftrightarrow g(x)=x, x\in[a,b].$$

Ainsi on procède dans cette méthode de la manière suivante :

- Écrire $F(x)=0$ sous la forme $g(x)=x$, ou g est définie et continue sur $[a,b]$.
- Sélectionner par un moyen quelconque une solution de départ $x_0\in[a,b]$

$$x_{i+1}=g(x_i), i=0,1,2,\ldots(2)$$

Théorème. **Convergence de la méthode de point fixe**

Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, soit $x_0\in[a,b]$ et soit la suite $x_{i+1}=g(x_i), i=0,1,2,\ldots$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. g **est stable** : $g(x)\in[a,b], \forall x\in[a,b]$
2. g **est contractante** : $\exists k\in ¿$ tel que $|g'(x)|\leq k, \forall x\in[a,b]$
   on peut prendre $k=\max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$.

alors g a un seul point critique α dans $[a,b]$ et la suite $x_{i+1}=g(x_i), i=0,1,2,\ldots$ converge vers α quel que soit $x_0\in[a,b]$.

3. Algorithme de la méthode

Données : ε, F et g

Initialisation $x_0\in[a,b]$, $i=1$

Tant que $|x_i-x_{i-1}|>\varepsilon$, faire

$x_{i+1}=g(x_i)$;

$i=i+1$;

Fin tant que

4. Travail demandé

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$F(x)=x-\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)=0, x\in[0,4](3)$$

On peut vérifier facilement que :

$$F(x)=0, x\in[0,4]\Longleftrightarrow = x=\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)=g(x), x\in[0,4]$$

A. Tracer les graphes des fonctions $g(x), |g'(x)|$ pour $x\in[0,4]$.

B. A partir des graphes tracés déduire si g est stable et contractante.

C. Déduire à partir du graphe de $\left|g^{'}(x)\right|$ une valeur de k.

D. Ecrire un script permettant de déterminer la solution de (3) à l'aide de la méthode de point fixe pour $x_0=0\,;x_0=1$ et $x_0=4$;

E. Quelle est la relation entre x_0 et le nombre d'itérations i.