Université de Bejaia
Facultés des Sciences Exactes
Département d'Informatique
Année universitaire 2022/2023

Master 1 : IA
Module : MEP
Responsable : Dr. M. YAZID

Série 1 : Chaînes de Markov à Temps Discret

Exercice 1 :

Pour assurer une meilleure conservation d'énergie dans un réseau de capteurs sans fil, deux clusters-Heads sont utilisés dans un même cluster pour l'envoi et la réception de données. Si p est la fiabilité d'un cluster-Head durant 1 mois, on s'intéresse alors au processus stochastique $\{X_n\}_{n\in N}$ qui représente le nombre de cluster-Heads en bon fonctionnement au début d'un mois. Un cluster-Head endommagé est considéré perdu.

1. Tracer une trajectoire possible du processus $\{X_n\}_{n\in N}$.
2. Donner l'espace des états (S) et l'espace du temps (T) du processus $\{X_n\}_{n\in N}$.
3. Déterminer les probabilités de transition P_{ij} du processus $\{X_n\}_{n\in N}$ d'un état i à un autre état j $(\forall i, j \in S)$.
4. Donner la représentation matricielle et graphique du processus $\{X_n\}_{n\in N}$.
5. Vérifier la propriété de Markov sur le processus $\{X_n\}_{n\in N}$.
6. Vérifier la propriété d'homogénéité sur le processus $\{X_n\}_{n\in N}$.
7. Déterminer la loi de $\{X_n\}_{n\in N}$ aux instants $n = \{1,2,3\}$, avec $p = 1/2$.

Exercice 2 :

Les commutateurs téléphoniques sont souvent équipés de trois CPUs. Une fois un commutateur téléphonique est installé, un contrat de maintenance est établi entre le fournisseur de service et l'entreprise. Ce contrat consiste comme suit : Une CPU tombée en panne au cours d'une journée donnée, sera réparée durant la nuit pour qu'elle soit remise en service au début de la journée suivante (une seule CPU peut être réparée à la fois). Soit $\{X_n\}_{n\in N}$ le processus stochastique modélisant le nombre de CPU en panne au début de la $n^{ème}$ journée, sachant que la fiabilité d'une CPU au cours d'une journée est égale à p.

1. Tracer une trajectoire possible du processus $\{X_n\}_{n\in N}$.
2. Donner l'ensemble des états (S) et l'ensemble des indices (T) du processus stochastique $\{X_n\}_{n\in N}$.
3. Déterminer les probabilités de transition P_{ij} d'un état i à un autre état j du processus stochastique $\{X_n\}_{n\in N}$ $(\forall\, i, j \in S)$.
4. Donner la représentation matricielle et graphique du processus stochastique $\{X_n\}_{n\in N}$.
5. Vérifier les conditions d'existence du vecteur des probabilités d'états stationnaires π, et calculer π pour $p = 1/2$ dans le cas où ces conditions sont vérifiées.