Corrigé De L'Examen De Mathématiques (II)

Corrigé De L'Exercice1(14pts) On a le système suivant :

$$(S)\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 6x + 2y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$ (0.5pts).

$$\blacksquare\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare\ \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

2. Ecriture matricielle de (S) (0.5pts).

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} et\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a l'écriture matricielle :

$$(S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. Calcul des deux produits matriciels (04pts).

- **Le Produit $A^2 = A \times A$.** On a :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \dots & 4 \\ \dots & 12 & \dots \\ 6 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule les éléments suivants :

L'élément de la première ligne et de la deuxième colonne c_{12}

$$c_{12} = L_1 \times C_2 = (2 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)(1) + (1)(2) + (1)(2) = \mathbf{6}$$

L'élément de la deuxième ligne et de la première colonne c_{21}

$$c_{21} = L_2 \times C_1 = (6 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = (6)(2) + (2)(6) + (1)(-2) = \mathbf{22}$$

L'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne c_{23}

$$c_{23} = L_2 \times C_3 = (6 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (6)(1) + (2)(1) + (1)(1) = \mathbf{9}$$

L'élément de la troisième ligne et de la deuxième colonne c_{32}

$$c_{32} = L_3 \times C_2 = (-2 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2)(1) + (2)(2) + (1)(2) = \mathbf{4}$$

Finalement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & \mathbf{6} & 4 \\ \mathbf{22} & 12 & \mathbf{9} \\ 6 & \mathbf{4} & 1 \end{pmatrix}$$

- **Le Produit $A^3 = A^2 \times A$.** On a :

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 22 & 12 & 9 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 28 & \dots \\ 98 & 64 & 43 \\ \dots & 16 & \dots \end{pmatrix}$$

On calcule les éléments suivants :

L'élément de la première ligne et de la première colonne c_{11}

$$c_{11} = L_1 \times C_1 = (8 \quad 6 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = (8)(2) + (6)(6) + (4)(-2) = \mathbf{44}$$

L'élément de la première ligne et de la troisième colonne c_{13}

$$c_{13} = L_1 \times C_3 = (8 \quad 6 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (8)(1) + (6)(1) + (4)(1) = \mathbf{18}$$

L'élément de la troisième ligne et de la première colonne c_{31}

$$c_{31} = L_3 \times C_1 = (6 \quad 4 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = (6)(2) + (4)(6) + (1)(-2) = \mathbf{34}$$

L'élément de la troisième ligne et de la troisième colonne c_{33}

$$c_{33} = L_3 \times C_3 = (6 \quad 4 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (6)(1) + (4)(1) + (1)(1) = \mathbf{11}$$

Finalement :

$$A^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{44} & 28 & \mathbf{18} \\ 98 & 64 & 43 \\ \mathbf{34} & 16 & \mathbf{11} \end{pmatrix}$$

4. **Vérification (01pts)** On a :

$$A^3 - 5A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 44 & 28 & 18 \\ 98 & 64 & 43 \\ 34 & 16 & 11 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 22 & 12 & 9 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 44 & 28 & 18 \\ 98 & 64 & 43 \\ 34 & 16 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 110 & 60 & 45 \\ 30 & 20 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 12 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autre terme :

$$\boldsymbol{A^3 - 5A^2 + 2A = 8I_3}$$

5. **La Déduction et la matrice inverse (02pts)**

Il suffit de mettre l'expression "$A^3 - 5A^2 + 2A = 8I_3$" sous la forme $A \times B = I_3$. On a :

$$A^3 - 5A^2 + 2A = 8I_3 \Longrightarrow \frac{1}{8}(A^3 - 5A^2 + 2A) = I_3 \Longrightarrow A \times \frac{1}{8}(A^2 - 5A + 2I_3) = I_3$$ **(01pts)**

Cette dernière égalité signifie que A est inversible et son inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A^2 - 5A + 2I_3) = \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 22 & 12 & 9 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 22 & 12 & 9 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 30 & 10 & 5 \\ -10 & 10 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & 4 \\ 16 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & -1/8 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \textbf{ (01pts)}$$

6. **Résolution du système (S) par la méthode de la matrice inverse (02pts)**

On a $AX = b$, A est inversible et A^{-1} son inverse. Donc, le système (S) admet une seule solution donnée par :

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & -1/8 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix} \textbf{ (0.5pts)}$$

Avec :

$$L_1 \times C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = (0)(1) + \left(\frac{1}{8}\right)(-1) + \left(-\frac{1}{8}\right)(7) = 0 + \frac{-1}{8} + \frac{-7}{8} = -1$$

$$L_2 \times C_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = (-1)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(7) = -1 + \frac{-1}{2} + \frac{7}{2} = 2$$

$$L_3 \times C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = (2)(1) + \left(-\frac{3}{4}\right)(-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)(7) = 2 + \frac{3}{4} - \frac{7}{4} = 1$$

Donc,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \textbf{ (01.5pts)}$$

7. **Vérification que le système est de Cramer (0.5pts)**

Le système (S) est de Cramer car la matrice des coefficients A est inversible (d'après ce qui précède).

8. **Résolution du système (S) par la méthode de Cramer (03.5pts)**

Comme le système est de Cramer (A est inversible), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer :

$$\blacksquare\ \boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 & 1 \\ \mathbf{7} & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-8}{8} = \mathbf{-1} \quad \blacksquare\ \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 6 & \mathbf{-1} & 1 \\ -2 & \mathbf{7} & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = \mathbf{2}$$

$$\blacksquare\ \boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \mathbf{1} \\ 6 & 2 & \mathbf{-1} \\ -2 & 2 & \mathbf{7} \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = \mathbf{1}$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare |\boldsymbol{A}| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{matrix}\right| = (2)(2)(1) + (1)(1)(-2) + (1)(6)(2) - (-2)(2)(1) - (2)(1)(2) - (1)(6)(1)$$

$$= 4 - 2 + 12 + 4 - 4 - 6 = \mathbf{8}.$$

$$\blacksquare |A_x| = \left|\begin{matrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 & 1 \\ \mathbf{7} & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 \\ \mathbf{7} & 2 \end{matrix}\right| = (1)(2)(1) + (1)(1)(7) + (1)(-1)(2) - (1)(2)(7) - (1)(1)(2) - (1)(-1)(1)$$

$$= 2 + 7 - 2 - 14 - 2 + 1 = \mathbf{-8}.$$

$$\blacksquare |A_y| = \left|\begin{matrix} 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 6 & \mathbf{-1} & 1 \\ -2 & \mathbf{7} & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & \mathbf{1} \\ 6 & \mathbf{-1} \\ -2 & \mathbf{7} \end{matrix}\right| = (2)(-1)(1) + (1)(1)(-2) + (1)(6)(7) - (1)(-1)(-2) - (2)(1)(7) - (1)(6)(1)$$

$$= -2 - 2 + 42 - 2 - 14 - 6 = \mathbf{16}.$$

$$\blacksquare |A_z| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & \mathbf{1} \\ 6 & 2 & \mathbf{-1} \\ -2 & 2 & \mathbf{7} \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{matrix}\right| = (2)(2)(7) + (1)(-1)(-2) + (1)(6)(2) - (1)(2)(-2) - (2)(-1)(2) - (1)(6)(7)$$

$$= 28 + 2 + 12 + 4 + 2 - 42 = \mathbf{8}.$$

Finalement :

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Corrigé De L'Exercice2(06pts) On a le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x - 2y - z + 3t = 0 \\ 3x - 3y - z + 5t = 0 \\ 2x - y + 2z + 5t = 0 \end{cases}$$

Résolvons (S) par Gauss. On a :

■ $\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2+(-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+(-3)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+(-2)L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) L_4 \leftrightarrow L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow (-1)L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4+L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{e}}$$

(03pts)

■ Soit (S_e) le système associé à la matrice $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \textbf{(0.5pts)}$$

Ainsi le système (S) admet une infinité de solutions (Dans (S_e) le nombre d'équations $<$ au nombre de variables).

■ La résolution de (S_e) :

$$\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ y - 2t + t = 0 \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - t + 2t = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \textbf{(01.5pts)}$$

Finalement, les solutions du système (S) sont :

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Avec α un nombre réel quelconque. **(01pts)**