Département FI(LMD) SECSG **Jeudi 16 Juin 2022**

Université De Bejaia **Corrigé De L'Examen De Mathématiques(II)**

1ère Année **Examen De Rattrapage**

Corrigé De L'Exercice1(05pts). **I-** On a les deux équations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1) \\ A-B=\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Les Matrices A et B(03pts)

En faisant la somme de l'équation (1) avec l'équation (2), on a :

$$(A+B)+(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 14 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

De même, en faisant la soustraction de l'équation (1) avec l'équation (2), on a :

$$(A+B)-(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B=\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

II- On a l'équation matricielle suivante : $2A-3B=4I_2$.

Où les matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La Matrice B(02pts) On a :

$$2A-3B=4I_2 \Rightarrow 3B=2A-4I_2 \Rightarrow B=\frac{1}{3}(2A-4I_2) \Rightarrow B=\frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Corrigé De L'Exercice2(10pts). On a le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} 6x-2y+z=1 \\ 14x-5y+3z=0 \\ 9x-3y+2z=1 \end{cases}$$

1. **La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$ (0.5pts).**

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 14 & -5 & 3 \\ 9 & -3 & 2 \end{pmatrix};\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 1 & 1 \\ 14 & -5 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

2. **Ecriture matricielle de (S) (0.5pts).**

En posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a : $(S) \Leftrightarrow AX=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 14 & -5 & 3 \\ 9 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Calcul du produit AB (03pts). On a

$$AB=\begin{pmatrix}6&-2&1\\14&-5&3\\9&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-3&4\\-3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1\times C_1&L_1\times C_2&L_1\times C_3\\L_2\times C_1&L_2\times C_2&L_2\times C_3\\L_3\times C_1&L_3\times C_2&L_3\times C_3\end{pmatrix}$$

Où L_i désigne la i^{eme} ligne de la matrice A et C_j désigne la j^{eme} colonne de la matrice B. Ainsi, on a :

Les éléments de la première ligne(01pts)

$$L_1\times C_1=(6\quad -2\quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=(6)(1)+(-2)(1)+(1)(-3)=6-2-5=\mathbf{1}$$

$$L_1\times C_2=(6\quad -2\quad 1)\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}=(6)(-1)+(-2)(-3)+(1)(0)=-6+6+0=\mathbf{0}$$

$$L_1\times C_3=(6\quad -2\quad 1)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=(6)(1)+(-2)(4)+(1)(2)=6-8+2=\mathbf{0}$$

Les éléments de la deuxième ligne(01pts)

$$L_2\times C_1=(14\quad -5\quad 3)\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=(14)(1)+(-5)(1)+(3)(-3)=14-5-9=\mathbf{0}$$

$$L_2\times C_2=(14\quad -5\quad 3)\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}=(14)(-1)+(-5)(-3)+(3)(0)=-14+15+0=\mathbf{1}$$

$$L_2\times C_3=(14\quad -5\quad 3)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=(14)(1)+(-5)(4)+(3)(2)=14-20+6=\mathbf{0}$$

Les éléments de la troisième ligne(01pts)

$$L_3\times C_1=(9\quad -3\quad 2)\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=(9)(1)+(-3)(1)+(2)(-3)=9-3-6=\mathbf{0}$$

$$L_3\times C_2=(9\quad -3\quad 2)\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}=(9)(-1)+(-3)(-3)+(2)(0)=-9+9+0=\mathbf{0}$$

$$L_3\times C_3=(9\quad -3\quad 2)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=(9)(1)+(-3)(4)+(2)(2)=9-12+4=\mathbf{1}$$

Donc,
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

En d'autre terme :
$$AB=I_3$$

4. Ce qu'est la matrice B pour la matrice A(01pts).

On a $AB=I_3$. Donc, la matrice B est la matrice inverse de A . En d'autre terme : $A^{-1}=B$.

5. Résolution du système par la Matrice Inverse(02pts)

Comme la matrice des coefficients A est inversible, alors le système (S) admet une seule solution

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnée par : $$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix}$$

Avec,

$$L_1 \times C_1 = (1 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(1) + (-1)(0) + (1)(1) = 1 + 0 + 1 = \mathbf{2}$$

$$L_2 \times C_1 = (1 \quad -3 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(1) + (-3)(0) + (4)(1) = 1 + 0 + 4 = \mathbf{5}$$

$$L_3 \times C_1 = (-3 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)(1) + (0)(0) + (2)(1) = -3 + 0 + 2 = \mathbf{-1}$$

Finalement : $$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

6. Résolution de (S) par Cramer (03pts).

Comme le système est de Cramer (A est inversible), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer :

$$\blacksquare\ \boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ \mathbf{0} & 3 & -1 \\ \mathbf{1} & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \mathbf{2}\ \blacksquare\ \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & \mathbf{1} & -1 \\ -8 & \mathbf{0} & -1 \\ 5 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \mathbf{5}\ \blacksquare\ \boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & \mathbf{1} \\ 14 & -5 & \mathbf{0} \\ 9 & -3 & \mathbf{1} \end{vmatrix}}{-1} = \mathbf{-1}$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 14 & -5 & 3 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & -2 \\ 14 & -5 \\ 9 & -3 \end{matrix}\Bigg| = (6)(-5)(2) + (-2)(3)(9) + (1)(14)(-3) - (1)(-5)(9) - (6)(3)(-3)$$
$$-(-2)(14)(2) = -60 - 54 - 42 + 45 + 54 + 56 = \mathbf{-1}.$$

$$\blacksquare |\boldsymbol{A_x}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & -5 & 3 \\ \mathbf{1} & -3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{1} & -2 \\ \mathbf{0} & -5 \\ \mathbf{1} & -3 \end{matrix}\Bigg| = (1)(-5)(2) + (-2)(3)(1) + (1)(0)(-3) - (1)(-5)(1) - (1)(3)(-3)$$
$$-(-2)(0)(2) = -10 - 6 + 0 + 5 + 9 + 0 = \mathbf{-2}.$$

$$\blacksquare |\boldsymbol{A_y}| = \begin{vmatrix} 6 & \mathbf{1} & 1 \\ 14 & \mathbf{0} & 3 \\ 9 & \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & \mathbf{1} \\ 14 & \mathbf{0} \\ 9 & \mathbf{1} \end{matrix}\Bigg| = (6)(0)(2) + (1)(3)(9) + (1)(14)(1) - (1)(0)(9) - (6)(3)(1) - (1)(14)(2)$$
$$= 0 + 27 + 14 - 0 - 18 - 28 = \mathbf{-5}.$$

$$\blacksquare |A_z| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & \mathbf{1} \\ 14 & -5 & \mathbf{0} \\ 9 & -3 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & -2 \\ 14 & -5 \\ 9 & -3 \end{matrix} = (6)(-5)(1) + (-2)(0)(9) + (1)(14)(-3) - (1)(-5)(9) - (6)(0)(-3)$$

$$-(-2)(14)(1) = -30 + 0 - 42 + 45 + 0 + 28 = \mathbf{1}.$$

Finalement :
$$\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Corrigé De L'Exercice3(05pts). La résolution du système (S) par Gauss :

$$(S)\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y + 2z - t = 3 \\ 2x - 2y + 3z - t = 4 \\ 4x - 2y + 6z - 3t = 4 \end{cases}$$

L'échelonnement de la matrice augmentée(04pts).

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 + (-1)L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-2)L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + (-4)L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) L_4 \longleftarrow L_4 + (-2)L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) L_4 \longleftarrow L_4 + (-1)L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) = \tilde{A}_e.$$

A la quatrième ligne de cette dernière matrice correspond l'équation : $\mathbf{0} = -\mathbf{4}$. Ce qui est impossible. Donc, le système (S) n'admet pas de solutions. **(01pts)**