Corrigé De L'Examen De Mathématiques (II)

Corrigé De L'Exercice1(10pts). On a la matrice A telle que :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

1. **Le Calcul(01pts)** On a :

$$\begin{aligned}3A-2A^t-I_3&=3\begin{pmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&3&12\\3&-3&6\\3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&2\\2&-2&2\\8&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{10}\\\mathbf{1}&\mathbf{-2}&\mathbf{4}\\\mathbf{-5}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. **Le Déterminant(02pts)**

- **En Développant suivant la 3eme colonne(01pts)** On a :

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=4A_{13}+2A_{23}+A_{33}$$

Où les A_{ij} sont les cofacteurs de la 3eme colonne, telle que :

$$\blacksquare A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=\mathbf{2}\ \blacksquare A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=\mathbf{0}\ \blacksquare A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=\mathbf{-2}$$

Ce qui nous donne :

$$\det A=4(2)+2(0)-2=8-2=\mathbf{6}.$$

- **Sarrus(01pts)**

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\1&-1\\1&1\end{matrix}\Bigg|=(1)(-1)(1)+(1)(2)(1)+(4)(1)(1)-(4)(-1)(1)-(1)(2)(1)-(1)(1)(1)$$

$$=-1+2+4+4-2-1=\mathbf{6}.$$

3. **Si A est inversible(0.5pts)** La matrice A est inversible car $\det A\neq 0$.
4. **Calcul de la matrice inverse(03.5pts)**

Les Cofacteurs(02.5pts)

$$\begin{cases}\blacksquare A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}=-3\ \blacksquare\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1\ \ \blacksquare\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\\\blacksquare A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}=3\ \blacksquare\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}=-3\ \blacksquare\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0\\\blacksquare A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}=6\ \blacksquare\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&4\\1&2\end{vmatrix}=2\ \blacksquare\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\end{cases}$$

La comatrice(0.5pts)

$$Com\ A=\begin{pmatrix}-3&1&2\\3&-3&0\\6&2&-2\end{pmatrix}\Longrightarrow(Com\ A)^t=\begin{pmatrix}-3&3&6\\1&-3&2\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

L'inverse(0.5pts)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Com\ A)^t = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

5. **La matrice X(03pts)** On a : $XA = B$ et A est inversible et son inverse est A^{-1}. Donc,

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 19 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & -2 & 19 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 36 & 18 \\ -12 & 24 & -12 \end{pmatrix}$$

Et finalement :

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Corrigé De L'Exercice2(04pts). On a le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y + 4z = 3 \\ -x + 4y - 5z = 4 \end{cases}$$

1. **Vérification que (S) est de Cramer(01pts)**

Il suffit de vérifier que la matrice des coefficients A est inversible. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

De plus par Sarrus, le déterminant de A :

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{matrix}\right| = (1)(-3)(-5) + (2)(4)(-1) + (3)(1)(4) - (3)(-3)(-1) - (-1)(4)(4)$$

$$-(2)(1)(-5) = 15 - 8 + 12 - 9 - 16 + 10 = \mathbf{4}.$$

Ainsi A est inversible et par conséquent le système est de Cramer.

2. **Résolution du système (S) par Cramer(03pts)**

Comme le système est de Cramer (A est inversible), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer :

$$\blacksquare\ \boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\left|\begin{matrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & -3 & 4 \\ \mathbf{4} & 4 & -5 \end{matrix}\right|}{4} = \frac{\mathbf{133}}{\mathbf{4}}\ \blacksquare\ \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\left|\begin{matrix} 1 & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & \mathbf{3} & 4 \\ -1 & \mathbf{4} & -5 \end{matrix}\right|}{4} = \frac{\mathbf{-9}}{\mathbf{4}}\ \blacksquare\ \boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\left|\begin{matrix} 1 & 2 & \mathbf{1} \\ 1 & -3 & \mathbf{3} \\ -1 & 4 & \mathbf{4} \end{matrix}\right|}{8} = \frac{\mathbf{-37}}{\mathbf{4}}$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare |\boldsymbol{A_x}| = \left|\begin{matrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & -3 & 4 \\ \mathbf{4} & 4 & -5 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{3} & -3 \\ \mathbf{4} & 4 \end{matrix}\right| = (1)(-3)(-5) + (2)(4)(4) + (3)(3)(4) - (3)(-3)(4) - (1)(4)(4) - (2)(3)(-5)$$

$$= 15 + 32 + 36 + 36 - 16 + 30 = \mathbf{133}.$$

$$\blacksquare |A_y| = \left|\begin{matrix} 1 & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & \mathbf{3} & 4 \\ -1 & \mathbf{4} & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{3} \\ -1 & \mathbf{4} \end{matrix}\Bigg| = (1)(3)(-5) + (1)(4)(-1) + (3)(1)(4) - (3)(3)(-1) - (1)(4)(4) - (1)(1)(-5)$$

$$= -15 - 4 + 12 + 9 - 16 + 5 = \mathbf{-8}.$$

$$\blacksquare |A_z| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & \mathbf{1} \\ 1 & -3 & \mathbf{3} \\ -1 & 4 & \mathbf{4} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{matrix}\Bigg| = (1)(-3)(4) + (2)(3)(-1) + (1)(1)(4) - (1)(-3)(-1) - (1)(3)(4) - (2)(1)(4)$$

$$= -12 - 6 + 4 - 3 - 12 - 8 = \mathbf{-37}.$$

Finalement :
$$\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{133/4} \\ \mathbf{-9/4} \\ \mathbf{-37/4} \end{pmatrix}$$

Corrigé De L'Exercice3(06pts). La résolution du système (S) par Gauss. Où (S) est définie par :

$$(S)\begin{cases} -x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

On a :

$$\blacksquare\ \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{0} & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow (-1)L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 \end{array}\right) L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{e}}.\ \textbf{(03pts)}$$

■ **Soit (S_e) le système associé à la matrice $\widetilde{A}_e$ (0.5pts)**

$$(S_e)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 1/2 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ainsi (S) admet une seule solution (Dans (S_e) le nombre d'équations = au nombre de variables).

■ **La résolution de (S_e) (02pts)**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + (-1) = 1/2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3/2 = 0 \\ x_2 = 3/2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 3/2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Finalement l'unique solution du système (S) est **(0.5pts)**

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3/2} \\ \mathbf{3/2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$