Opérations sur les matrices

Exercice1. On considère les matrices suivantes :

$$\blacksquare A=\begin{pmatrix}-1&-3&2\\2&0&-4\\1&3&0\end{pmatrix}\blacksquare B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&0\\1&-2\end{pmatrix}\blacksquare C=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\0&4&0\\-1&2&-5\end{pmatrix}.$$

Faites, si possible, les opérations suivantes :

$$\blacksquare 3A-5C\ \blacksquare 3A+2B\ \blacksquare AC\ \blacksquare BA\ \blacksquare AB\ \blacksquare ABC\ \blacksquare CAB\ \blacksquare BB^t\ \blacksquare B^tB\ \blacksquare B^2\ \blacksquare A^2\ \blacksquare C^3$$

(la notation B^t désigne la matrice transposée de B)

Exercice2. Calculer lorsqu'ils sont définies les produits AB et BA dans les cas suivants :

$\blacksquare A=\begin{pmatrix}3&-2&5\\-1&0&-8\\3&-2&7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-1\\4&3\end{pmatrix}.$

$\blacksquare A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.$

$\blacksquare A=\begin{pmatrix}-1&-3&2\\2&0&-4\\1&3&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$

$\blacksquare A=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\0&4&0\\-1&2&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-10&8\end{pmatrix}.$

$\blacksquare A=\begin{pmatrix}3\\-5\\12\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}10&11&13\end{pmatrix}.$

Calcul Algébrique Avec Des Matrices Carrée

Exercie3. I- Considérons les matrices carrées A, B et I (I désigne la matrice identité) de même ordre. Développer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$\blacksquare 2A(3B-I)-(3B-I)(2A)\blacksquare(A-B)(A+B)-(A^2-B^2)\blacksquare(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)\blacksquare(A+I)^2$$
$$\blacksquare(A-I)(A+I).$$

II- Ecrire les expressions suivantes sous la forme $AB=I$ ou $BA=I$:

$$\blacksquare 5A^2=2I-3A\blacksquare 3A^3-2A^2+5A=-3I\blacksquare A^3-3A+2I=0\blacksquare(A^2-2I)(2A+I)=0.$$

Equations Matricielles

Exercice4. I- Trouver les matrices A et B sachant que :

$$A+B=\begin{pmatrix}2&-1\\4&3\end{pmatrix} \text{ et } A-B=\begin{pmatrix}-6&5\\10&-15\end{pmatrix}$$

II- Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1&-3&8\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Trouver X telle que : $AX=b$.

Déterminants

Exercice5. I- Calculer les déterminants suivants en développant par une ligne ou une colonne :

■ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -1 & -8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

II- Utiliser la méthode de Sarrus pour calculer les déterminants ci-dessus.

III- En utilisant leurs propriétés, déduire la valeur de chacun de ces déterminants :

■ $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

■ $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 3 & 11 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -1 & -8 & -3 \\ 4 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -4 & -7 & 0 \\ 6 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} -3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 33 \end{vmatrix}$

IV- Calculer les déterminants suivants en utilisant la méthode du Pivot de Gauss :

■ $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ ■ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Matrices Inverses

Exercice6. Dire si la matrice A est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse :

■ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ■ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ■ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ■ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice7. On considère les deux matrices A et B, telles que :

■ $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ ■ $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5/2 \\ -1 & 5 & -13/2 \\ -1 & 4 & -11/2 \end{pmatrix}$

Vérifier que la matrice inverse $A^{-1} = B$.

Exercice8. On considère la matrice A définie par les cas suivants :

■ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

■ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

■ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercices Supplémentaires Sur Le Calcul Matriciel

Exercice9. On considère la matrice A définie par les cas suivants :

■$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice A est inversible ? Dans ce cas, calculer son inverse.

■$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice A est inversible ? Dans ce cas, calculer son inverse.

Dans chacun de ces cas, trouver la matrice X telle que $AX = b$, ou $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice10. On considère les matrices suivantes :

$$■A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} ■B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ■C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?
2. Déduire que A ne peut être inversible.

Exercice11. Calculer la matrice inverse de A par la méthode du Pivot de Gauss-Jordan :

$$■A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Echelonnement

Exercice4: Donner la forme échelonnée et échelonnée réduite de A dans les cas suivants:

$$■A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 & 14 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$■A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} ■A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$