Université A. Mira – Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
L1Maths &L1MI

Année universitaire 2022/2023

Corrigé de la série de TD N°4 d'Algèbre 2

Exercice 1 :

1°) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

• $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (matrice triangulaire supérieure.

$\det(C) = (1)(-24)(-2) = 48$. (produit des éléts diagonaux)

En déduire det B :

on a $\det C = \det A \cdot \det B$.

or $\det A = 1$ (puisque A est triangulaire inférieure)

d'où $\det B = \det C = 48$.

$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}$ D est obtenue en multipliant la $1^{ère}$ colonne de B par 3 et par $(-\frac{1}{2})$ la $2^{ème}$ et par 5 la $3^{ème}$ colo

$\det D = 3\left(-\frac{1}{2}\right)(5) \det B = -360$.

$$\boxed{\det D = -360}$$

2°) Calcul des déterminants :

$$\Delta_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_2 & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$ (en développant suivant la colonne C_2)

$$= 4(2+4) = 24.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -27+16 = -11.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 \leftarrow C_2 - C_1 & C_3 \leftarrow C_3 - C_1 & C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = -8.$$

<u>Exercice 2</u> :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°) $A^3 - A = ?$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = 4 I_3 \Rightarrow A(A^2 - I_3) = 4 I_3.$$

$$\Rightarrow A \cdot \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3.$$

$$= \frac{1}{4}(A^2 - I_3) A.$$

D'où A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$.

On a : $A^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Par la méthode des coeffacteurs.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \; l_1 \leftarrow l_1 - l_3.$$

$= 2 + 2 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow A$ est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}_A$$

$$\mathrm{Com}_A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & +2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\mathrm{Com}_A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Resolvons le système de Cramer

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \leftarrow l_1 + l_2 \\ \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2 . \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 + 3 = 7$$

puisque $\det A \neq 0 \Rightarrow (S)$ est de Cramer.

Il admet donc une unique solution

$$x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{7} = 1$$

D'où l'unique solution de (S) est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$