جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I

06/06/2018
Durée : 1h30mn

Examen d'Algèbre 2

Exercice 1. (05 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $\mathbb{F} = \{f \in \mathbb{E} : \ f(1) = 0\}$ et g l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = x^2$.

On considère $\mathbb{G} =< g >$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ engendré par g.

01 **1.** Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

01 **2.** Quelle est la forme générale d'un élément de $\mathbb{G}$.

01,5 **3.** Déterminer $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

0,1,5 **4.** Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

Exercice 2. (08 points)

Soient les applications linéaires suivantes:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z, x+y+z) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y, -x+2y, x) \end{array}$$

02 **1.** Déterminer une base de $\ker f$. En déduire $rg(f)$ et que f est surjective.
01 0,5 0,5

01+0,5 **2.** a) Montrer que g est injective. En déduire $rg(g)$.

01,5 b) Montrer que $(v_1 = (-1,2,0), v_2 = (0,-1,1))$ est une base de $Im\ g$.
$\left\{\begin{array}{l} v_1 \in Im\, g \ \ 0,5 \\ v_2 \in Im\, g \ \ 0,5 \\ \{v_1, v_2\}\ L.I \ \ 0,5 \end{array}\right.$

01 **3.** Montrer que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.

01+01 **4.** Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $Im(g \circ f) = Im\ g$

Exercice 3. (07 points)

1. Soient les matrices suivantes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5+1,5 Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
$\left\{\begin{array}{l} P.Q = 0,5 \\ Q.P = 0,5 \\ P^{-1} = \frac{1}{3}Q \ \ 01 \end{array}\right.$

0,5 **2.** On pose $v_1 = (-1,1,0), \ v_2 = (0,-1,1), \ v_3 = (1,1,1)$ et $\mathbf{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Justifier que $\mathbf{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(v_1) = v_1, \ f(v_2) = v_2, \ f(v_3) = (0,0,0)$.

0,5 a) Donner la matrice M de f dans la base $\mathbf{B}$.

01,5 b) Exprimer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des matrices définies précédemment.

c) Calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
$\left\{\begin{array}{l} M = M^n = 0,5 \\ A^n = PM^nP^{-1} \ \ 01 \\ \text{calcule} \ \ 01 \end{array}\right.$

Correction d'examen d'Algèbre 2

Exo 1 : (05 pts).

1) $F = \{f \in E ; f(1) = 0\}$.

F est un s.e.v de E car :

a) $F \neq \emptyset$ car $\mathcal{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, $\mathcal{E} \in F$.

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in F$.

$(\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$.

d'où $(\alpha f + \beta g) \in F$.

2) $G = \langle g \rangle$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

$\forall f \in G, \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $f = \alpha . g$ d'où

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha g(x) = \alpha x^2$.

3) $F \cap G = ?$

Soit $f \in F \cap G \Rightarrow f(1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x^2$.

par suite $f(1) = \alpha = 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. d'où $F \cap G = \{\mathcal{E}\}$.

4) F et G sont supplémentaires dans E $\Leftrightarrow F \oplus G = E$

donc a) $F \cap G = \{\mathcal{E}\}$ (d'après 3°)

b) $\forall h \in E, \exists f \in F, \exists g \in G$ tq $h = f + g$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x)$ or $g(x) = \alpha x^2$ et $f(1$

donc $h(x) = f(x) + \alpha x^2$ et $h(1) = f(1) + \alpha = \alpha$.

d'où $\alpha = h(1)$ alors $g(x) = h(1) . x^2$.

par suite on aura $f(x) = h(x) - h(1) . x^2$

d'où $\forall h \in E, \exists f \in E, \exists g \in G$ tq $h = f + g$ donc $E = F + G$

de a) et b) $E = F \oplus G$.

Exo2.

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (z, x+y+z)$$

1) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(x,y,z) = (0,0)\}$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

d'où $\operatorname{Ker} f = \{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,0) \rangle$
donc Base $\operatorname{Ker} f = \{(1,-1,0)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.
$rg(f) = ?$, f surjective $?$
On a $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f + rg(f)$
d'où $rg(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ e
surjective.

2) a) $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$$(x,y) \longmapsto (-y, -x+2y, x).$$

On a: $\operatorname{Ker} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (-y,-x+2y,x) = (0,0,0)\}$
$= \{(0,0)\}$
d'où g est injective.
$rg(g) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} g = 2$.

b) $(v_1 = (-1,2,0), v_2 = (0,-1,1))$
On a (v_1, v_2) sont linéairement independant de
$v_1 \in \operatorname{Im} g$ car $g(0,1) = v_1$ et
$v_2 \in \operatorname{Im} g$ car $g(1,0) = v_2$.

donc (v_1, v_2) est une base de $\operatorname{Im} g$ (dim Im

3) $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$. $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\circ g(x,y) = f(g(x,y)) = f(-y, -x+2y, x)$
$= (x,y)$.
d'où $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$

Suite Exo2

4) $\ker(g\circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g$?

$g\circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, g\circ f(x,y,z) = (-x-y-z, 2x+2y+z, z$

$\ker(g\circ f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (-x-y-z, 2x+2y+z, z) = (0,0,$

$= \{(x,-x,0) / x \in \mathbb{R}\} = \ker f$.

$\operatorname{Im}(g\circ f) = \{(-x-y-z, 2x+2y+z, z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

$= \langle (-1,2,0), (-1,1,1) \rangle$

et $\operatorname{Im} g = \langle (0,-1,1), (-1,2,0) \rangle$.

on a bien $\dim(\operatorname{Im}(g\circ f)) = \dim \operatorname{Im} g$ et

$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g\circ f)$ car $\begin{cases} (-1,2,0) \in \operatorname{Im}(g\circ f) \\ (0,-1,1) = (-1,1,1) - (-1,2 \end{cases}$

donc $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g$.

<u>Exo3</u>

1) • $P.Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

donc $P.Q = 3.I_3$ $\quad \left(I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

• on a $Q.P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a bien $P.(\frac{1}{3}Q) = (\frac{1}{3}Q).P = I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

2) $v_1 = (-1,1,0)$, $v_2 = (0,-1,1)$, $v_3 = (1,1,1)$

$B = (v_1, v_2, v_3)$

On remarque que (v_1, v_2, v_3) sont les vecteurs colonne de P et P inversible donc

$rg(P) = 3$ d'où (v_1, v_2, v_3) sont libre dans de plus $card\, B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ d'où B est une base de $\mathbb{R}^3$.

3)) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = (0,0,0)$.

ⓐ $$Mat(f, B) = M = \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

ⓑ D'après 1°) et 2°) on remarque que

P est la matrice de passage de la $B_c(\mathbb{R}^3)$ à B.

$(B_c(\mathbb{R}^3) = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$
la base canonique$)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{B_c} \arrow[r, "Id"', "P^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "A"'] & \mathbb{R}^3_B \arrow[r, "f", "M"'] & \mathbb{R}^3_B \arrow[r, "Id", "P"'] & \mathbb{R}^3_{B_c} \end{tikzcd}$$

$A = P.M.P^{-1}$.

$$A = P.M.P^{-1} = \frac{1}{3} P.M.Q =$$

ⓒ Calcule A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $A = \frac{1}{3} P.M.Q$,

pour $n = 2$, $A^2 = (\frac{1}{3} P.M.Q)(\frac{1}{3} P.M.Q) = \frac{1}{3} P.M^2 Q$

On montre par récurrence que $A^n = \frac{1}{3} P.M^n.Q$.

pour $n = 2$ c'est vérifié.

pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $A^n = \frac{1}{3} P.M^n.Q$

on montre que $A^{n+1} = \frac{1}{3} P.M^{n+1}.Q$

$A^{n+1} = A^n.A = (\frac{1}{3} P.M^n.Q).(P.M\frac{1}{3}Q) = \frac{1}{3} PM^n(\frac{Q}{3}.P).M.Q$

$= \frac{1}{3} PM^{n+1} Q$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{3} PM^n Q$

Calcule : M^n

par reccurence on montre que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$

$n = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M.$

pour $n \in \mathbb{N}$, $M^n = M$, on montre $M^{n+1} = M$.

On a $M^{n+1} = M^n . M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M.$

d'où $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$