Chapitre

Rappel sur la théorie des probabilités

1 Expérience aléatoire et événement

1.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire (e.a) est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard.

Exemple 5.1. Le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure est une expérience aléatoire qui conduit à deux résultats possibles : Face (F) ou Pile (P).

Définition 5.1. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une e.a. est appelé **ensemble fondamental** et on le note généralement Ω.

Exemple 5.2. Lorsqu'on jette un dé (à six faces numérotées), si on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.2 Événement

Un événement de Ω est un sous ensemble de Ω. Un événement peut être élémentaire (un seul élément) ou composé (plusieurs éléments).

Exemple 5.3. Lorsqu'on jette un dé à six faces numérotées $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'événement A **:** "avoir le chiffre 2", est un événement élémentaire $A = \{2\} \subset \Omega$.
l'événement B **:** "avoir un chiffre pair", est un événement composé $B = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

2 Relations et opérations entre les événements

2.1 Inclusion

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire. On dira que A est inclu dans B (ou A implique B), si la réalisation de A entraîne nécessairement la réalisation de B. On le note $A \subset B$ (ou $A \Rightarrow B$).

Exemple 5.4. Dans l'exemple précédent (exemple 5.3) $A = \{2\} \subset B = \{2, 4, 6\}$, si A est réalisé alors B est réalisé.

2.2 Événement contraire

On appelle événement contraire de l'événement A le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, l'événement réalisé lorsque A n'est pas réalisé et vice versa.

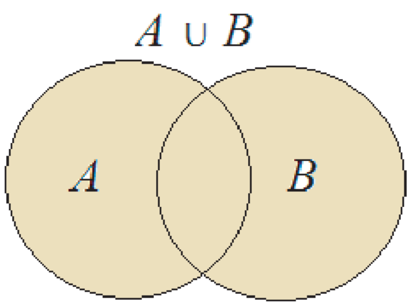
Remarque 5.1. Soit A un événement de Ω et $\overline{A}$ son événement contraire.

1. Si A est réalisé alors $\overline{A}$ n'est pas réalisé.
2. Si A n'est pas réalisé alors $\overline{A}$ est réalisé.
3. L'ensemble fondamental Ω est toujours réalisé, on l'appelle **événement certain**. Son événement contraire est **l'événement impossible**, noté $\emptyset$.

Exemple 5.5. Si on prend l'événement B dans l'exemple précédent, "avoir un chiffre pair" $B = \{2, 4, 6\}$; alors son événement contraire $\overline{B}$ est "avoir un chiffre impair" $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$.

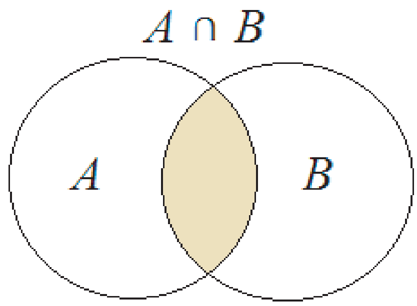
2.3 Union (Disjonction)

On dit que l'événement "A ou B", noté $(A \cup B)$, est réalisé si l'un au moins des deux événements est réalisé (i.e. A est réalisé **ou** B est réalisé).



2.4 Intersection (Conjonction)

L'événement "A et B", noté $(A \cap B)$, est réalisé lorsque A est réalisé **et** B est réalisé



2.5 Événements incompatibles (disjoints)

Les événements A et B sont dits incompatibles si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre. Autrement dit, si l'un est réalisé l'autre ne se réalisera pas (deux événements qui ne peuvent se réaliser à la fois) :

$$A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Exemple 5.6. B et $\overline{B}$ sont incompatibles.

2.6 Système complet d'événements

Soient Ω l'ensemble fondamentale associé à une expérience aléatoire et A_1, A_2,..., A_n des événements de Ω. Les événements A_1, A_2,..., A_n forment un système complet d'événements, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les A_i sont réalisables ($A_i \neq \emptyset$), $\forall i = 1, 2, ..., n$.
2. Les A_i sont incompatibles 2 à 2 : $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$.
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Exemple 5.7. Dans le jet d'un dé (une fois), on a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les événements $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$ et $A_6 = \{6\}$ forment un système complet d'événements.

3 Définition axiomatique de la probabilité

Soient deux événements A et B dans Ω.

1. La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq p(A) \leq 1.$$

2. La probabilité de l'événement certain Ω est égale à 1 et la probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ est 0 :
$$p(\Omega) = 1 \text{ et } p(\emptyset) = 0.$$

3. Soient A et B deux événements incompatibles, $(A \cap B = \emptyset)$, alors
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

4. Si $A \subseteq B$, alors $p(A) \leq p(B)$.

5. **Généralisation à n événements** : Soient A_1, A_2,..., A_n des événements incompatibles 2 à 2. Alors
$$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n), \text{ i.e. } p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).$$

Conséquence :
Soit A un événement et $\overline{A}$ son contraire, alors
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

En effet,
$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} = \Omega, \text{ donc } p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega) \quad &\Leftrightarrow \quad p(A) + p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A). \end{aligned}$$

Remarque 5.2. Tout calcul conduisant à des valeurs de probabilités négatives ou supérieures à 1 est faux.

Exemple 5.8. Reprenons l'exemple du jet d'un dé à 6 faces équilibrées, où
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
avec les événements :
$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3\},\ A_4 = \{4\},\ A_5 = \{5\} \text{ et } A_6 = \{6\}.$$

Les événements $A_i, i = 1, 2, ..., 6$ sont tous incompatibles et $p(A_i) = \frac{1}{6}$ pour tout $i = \overline{1, 6}$.
$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$.

4 Définition classique des probabilités

A chaque événement A d'une expérience aléatoire (e.a.) est associé un nombre que l'on note $p(A)$ compris entre 0 et 1 qui mesure la probabilité de la réalisation de A. Si une e.a. a N cas possibles et parmi ces N cas, il y a n cas favorables à la réalisation de l'événement A, on définit la probabilité de la réalisation de A par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

D'une manière équivalente

$$p(A) = \frac{n}{N}.$$

Exemple 5.9. Dans le jet d'un dé à six faces équilibrées, soit A l'événement "avoir un nombre pair".
Nombre de cas possibles est 6 : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nombre de cas favorables est 3 : $A = \{2, 4, 6\}$.

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{3}{6}.$$

Théorème 5.1. *Soient A et B deux événements de l'espace fondamental Ω, alors :*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 5.10. Dans le jet du dé à 6 faces équilibrées, considérons les événements :

A : "avoir un nombre pair" ;
B : "avoir un multiple de 3".

On a

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\} \text{ et } A \cap B = \{6\},$$

alors

$$p(A) = \frac{3}{6}, p(B) = \frac{2}{6} \text{ et } p(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

D'où

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

En effet,

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{4}{6}.$$

5 Probabilités conditionnelles

Considérons le jet de deux dés parfaits et soit A l'événement : "la somme des points obtenus est au moins égale à 10".
Les cas qui donnent au moins 10 sont

$$A = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5)\}, \text{ et } p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

1. Supposons que le premier dé nous donne le chiffre 3 (événement B : "obtenir le chiffre 3 sur la surface supérieure du premier dé"). Alors, l'événement A est devenu irréalisable (A et B incompatibles). Nous dirons que la probabilité de A sachant que B est réalisé est nulle, et nous écrivons $p(A/B) = 0$.
2. Supposons maintenant que le premier dé amène un 6 (événement C). Pour atteindre ou dépasser 10, il faut avoir sur la face supérieure du second dé : 4, 5, ou 6. On aura 3 chance sur 6 et $p(A/B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Définition 5.2. Soient A et B deux événements, tels que $p(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est donnée par la formule :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Exemple 5.11. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire une boule, on la garde, puis on tire une autre.

(i) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage, sachant que on a tiré une boule rouge au premier tirage ?

(ii) Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges au cours des deux tirages (une boule rouge dans chaque tirage) ?

Solution

Posons les événements suivants :
A_1 : "avoir une boule rouge au premier tirage".
A_2 : "avoir une boule rouge au deuxième tirage".
$A_1 \cap A_2$: "avoir une boule rouge dans chaque tirage (deux boules rouges)".

(i) On a

$$p(A_1) = \frac{2}{5}$$

et la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage, sachant que on a tiré une boule rouge au premier tirage est :

$$p(A_2/A_1) = \frac{1}{4}.$$

(ii) Par définition

$$p(A_2/A_1) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_1)},$$

alors

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

6 Formule des probabilités composées

Pour tout événement A et B tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, on a :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \text{ alors } p(A \cap B) = p(A/B)p(B);$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \text{ alors } p(A \cap B) = p(B/A)p(A).$$

Des deux formules énoncées, on déduit

$$p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A).$$

Exemple 5.12. Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire deux boules successivement et sans remise.
Quelle est la probabilité pour que la première boule soit noire et que la deuxième soit blanche ?

Solution

Posons les événements suivants :
A : "tirer une boule noire au premier tirage".
B : "tirer une boule blanche au deuxième tirage".
On a

$$p(A) = \frac{2}{5} \text{ et } p(B/A) = \frac{3}{4},$$

d'où

$$p(A \cap B) = p(B/A)p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}.$$

7 Événements indépendants

Deux événements A et B sont dit indépendants si la réalisation ou la non réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation ou la non réalisation de l'autre. A et B sont indépendants si

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Conclusion
$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A).$$

Exemple 5.13. Dans le jet d'un dé à six faces numérotées, considérons les événements :
A : "avoir un nombre pair".
B : "avoir un multiple de 3".
On a donc $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ et $A \cap B = \{6\}$.
Alors $p(A) = \frac{3}{6}$, $p(B) = \frac{2}{6}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
On a aussi, $p(A) \times p(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.
Donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire A et B sont indépendants.

8 Formule des probabilités totales

Soient $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ une famille d'événements constituant un système complet d'événements de Ω, c'est-à-dire :

$$A_i \neq \emptyset, \forall i = \overline{1, n}; \; A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Soit B un événement quelconque de Ω, alors

$$p(B) = p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) + ... + p(B/A_n)p(A_n),$$

identiquement équivalent à
$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i)p(A_i).$$

Exemple 5.14. Trois machines A, B et C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total de comprimés fabriqués par un laboratoire pharmaceutique. Chacune de ces machines produit respectivement 5%, 6% et 3% de comprimés défectueux.
Quelle est la probabilité qu'un comprimé pris au hasard, soit défectueux ?

Solution
Posons les événements suivants :
A : "le comprimé provient de la machine A" ;
B : "le comprimé provient de la machine B" ;
C : "le comprimé provient de la machine C" ;
D : "le comprimé est défectueux".

On a

$$p(A) = 0.4,\ p(B) = 0.35,\ p(C) = 0.25,$$

$$p(D/A) = 0.05,\ p(D/B) = 0.06,\ p(D/C) = 0.03.$$

A, B et C forment un système complet d'événements, alors la probabilité qu'un comprimé pris au hasard soit défectueux (en utilisant la formule des probabilités totales) est :

$$p(D) = p(D/A)p(A) + p(D/B)p(B) + p(D/C)p(C)$$

$$p(D) == (0.05 \times 0.4) + (0.06 \times 0.35) + (0.03 \times 0.25) = 0.0485.$$

On peut construire le diagramme en arbre (l'arborescence) des événements, avec l'événement $N = \overline{D}$: "le comprimé n'est défectueux" (voir figure 5.1).

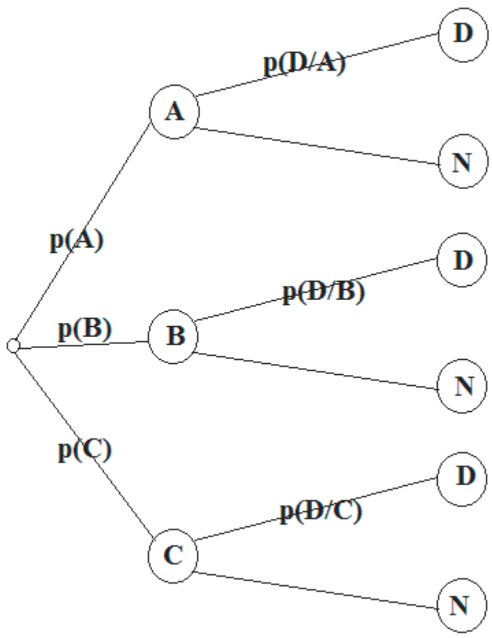


FIGURE 5.1 – Arborescence des événements.

9 Théorème de Bayes

Dans la formule des probabilités totales, on s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement quelconque B, qui est donnée par

$$p(B) = p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) + ... + p(B/A_n)p(A_n). \tag{5.1}$$

Par contre, pour i donné, la probabilité conditionnelle de A_i sachant que l'événement B est réalisé est définie par

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}.$$

En utilisant la formule (5.1) et en remplaçant $p(A_i \cap B)$ par $p(A_i \cap B) = p(B/A_i)p(A_i)$, on aura le théorème suivant :

Théorème 5.2. ***Théorème de Bayes***
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements et B un événement quelconque. Pour tout i, $i \in \{1, 2, ..., n$, on a :

$$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i)p(A_i))}{p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) + ... + p(B/A_n)p(A_n)}.$$

Exemple 5.15. Dans l'exemple des comprimés défectueux on prend un comprimé défectueux. Quelle est la probabilité que ce défectueux provient de la machine A ?

Solution

$$p(A/D) = \frac{p(D/A)p(A)}{p(D)} = \frac{0.05 \times 0.4}{0.0485} = 0.41.$$

10 Exercices et corrigés

10.1 Exercices

Exercice 1 : Un sac contient trois objets rouges, deux objets bleus et quatre objets jaunes. On tire simultanément trois objets du sac.

1. Quelle est le nombre de cas possibles ?
2. Donner le nombre de cas favorables à la réalisation des événements définis ci-dessous.
   (a) A : " les trois objets tirés sont jaunes".
   (b) B : " il y a un objet de chaque couleur".
   (c) C : " aucun objet n'est rouge".
   (d) D : " il y a au moins un objet rouge".
3. Calculer les probabilités de réalisation de ses événements.

Exercice 2 : Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,7$.

1. Calculer la probabilité de $A \cup B$ dans le cas où :
   (a) A et B sont incompatibles.
   (b) A et B sont indépendants.
2. En prenant $P(A \cup B) = 0.8$, déduire les probabilités : $P(A \cap B)$, $P(A/B)$, $P(\overline{A}/B)$ et $P(\overline{A}/\overline{B})$.

Exercice 3 : Dans une certaine population, il y a 70% d'individus portent des lunettes de soleil et parmi ces individus 60% sont des femmes. Parmi les non porteurs de lunettes, il y a 10% de personnes sont des hommes.

1. Ecrire les données de l'énoncé en utilisant des notations adéquates.
2. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard est une femme.
3. Sachant que la personne est une femme, quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes.

Exercice 4 : On tire simultanément, au hasard et sans remises trois boules d'une urne, contenant 3 boules noires, 1 boule blanche et 1 boule verte.

1. Donner le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer les probabilités de réalisation des événements suivants :
   (a) A : " tirer trois boules de même couleur".
   (b) B : " tirer trois de couleurs différentes".

(c) C : " tirer trois boules vertes".

(d) D : "obtenir une boule verte".

3. Calculer $P(B \cap D)$ et $P(B \setminus D)$.
4. Les événements D et B sont-ils indépendants ou incompatibles ?

Exercice 5 : Vous êtes directeur de cabinet du ministère de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion de 11 personnes malades sur 100. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous présenter son nouveau test de dépistage, si une personne est malade le test est positif à 99% et si une personne n'est pas malade le test est positif à 0.1 %.

1. Calculer la probabilité pour que ce test soit positif.
2. Sachant que ce test est fiable si sa valeur predictive est supérieure ou égale à 0.99 (c-à-dire la probabilité pour qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ≥ 0.99). Autorisez vous la commercialisation de ce test ?

10.2 Corrigés

Exercice 1 : Un sac contient trois objets rouges, deux objets bleus et quatre objets jaunes. On tire simultanément trois objets du sac.

Tirage simultané et sans remises de 3 objets parmi 9 : 3 objets rouges, 2 bleus et 4 jaunes

l'ordre n'est pas important et pas de répétitions

combinaisons sans répétitions C_n^p

1. Le nombre de cas possibles est $N = C_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!3!} = 84$.
2. Le nombre de cas favorables à la réalisation des événements A, B, C et D :

(a) A : " les trois objets tirés sont jaunes".

$$N_A = C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4.$$

(b) B : " il y a un objet de chaque couleur".

$$N_B = C_3^1 C_2^1 C_4^1 = 3 \times 2 \times 4 = 24.$$

(c) C : " aucun objet n'est rouge".

On a 9 objets dont 3 sont rouges, alors le nombre d'objets non rouge est 9-3=6.

$$N_C = C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20.$$

(d) D : " il y a au moins un objet rouge".
Méthode 1 : $N_D = N - N_C = 84 - 20 = 64$.
Méthode 2 : $N_D = C_3^1 C_6^2 + C_3^2 C_6^1 + C_3^3 = (3 \times 15) + (3 \times 6) + (1 \times 1) = 64$.

3. Calcul des probabilités de réalisation de ses événements :
   (a) $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.
   (b) $P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{24}{84} = \frac{6}{21}$.
   (c) $P(C) = \frac{N_C}{N} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$.
   (d) $P(D) = \frac{N_D}{N} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$.

Exercice 2 : A et B deux événements tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,7$.

1. Calcul de la probabilité de $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

   (a) Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, donc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0 = 0,2 + 0,7 = 0,9.$$

   (b) Si A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc

$$\begin{aligned} (A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0,2 + 0,7 - (0,2 \times 0,7) = 0,76. \end{aligned}$$

2. Déduction des probabilités $P(A \cap B)$, $P(A/B)$, $P(\overline{A}/B)$ et $P(\overline{A}/\overline{B})$, sachant que $P(A \cup B) = 0.8$:
   (a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,7 - 0,8 = 0,1$.
   (b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{1}{7}$.
   (c) $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.
   (d) $P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1-0,8}{1-0,7} = \frac{2}{3}$.

Exercice 3 : Dans une certaine population, il y a 70% d'individus portent des lunettes de soleil et parmi ces individus 60% sont des femmes. Parmi les non porteurs de lunettes, il y a 10% de personnes sont des hommes.

1. Les événements et les probabilités correspondants à cet énoncé sont :
   L : "l'individu porte des lunettes de soleil".
   F : "l'individu est une femme".
   $\overline{F}$: "l'individu n'est pas une femme (est un homme)".

$$P(L) = 0.7, P(F/L) = 0.6 \; et \; P(\overline{F}/\overline{L}) = 0.1.$$

Et par déduction, on a :

$$\begin{aligned} P(\overline{L}) &= 1 - P(L) = 1 - 0.7 = 0.3; \\ P(F/\overline{L}) &= 1 - P(\overline{F}/\overline{L}) = 1 - 0.1 = 0.9. \end{aligned}$$

2. Calcul de la probabilité qu'une personne choisie au hasard est une femme :
   Les deux événements L et $\overline{L}$ forment un système complet d'événements, alors on peut utiliser la formule des probabilités totales pour calculer cette probabilité, notée $P(F)$.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F/L)P(L) + P(F/\overline{L})P(\overline{L}) \\ &= (0.6 \times 0.7) + (0.9 \times 0.3) = 0.42 \times 0.27 = 0.69. \end{aligned}$$

3. Sachant que la personne est une femme, la probabilité qu'elle porte des lunettes est :
   Pour le calcul de cette probabilité, notée $P(L/F)$, on utilise la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(L/F) &= \frac{P(L \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F/L)P(L)}{P(F)} \\ &= \frac{0.6 \times 0.7}{0.69} = 0.60869. \end{aligned}$$

Exercice 4 : Tirage simultané sans remises de 3 boules parmi 5 boules : 3 noires, 1 blanche et 1 verte

$$\overbrace{\text{l'ordre n'est pas important et pas de répétitions}}$$

$$\overbrace{\text{combinaisons sans répétitions } \ C_n^p}$$

1. Le nombre de tirages possibles est : $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$.
2. Calcul de probabilités des événements A, B, C et D :
   •A : "tirer 3 boules de même couleur".

$$P(A) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

   •B : "tirer 3 boules de couleurs différentes".

$$P(B) = \frac{C_3^1 C_1^1 C_1^1}{C_5^3} = \frac{3 \times 1 \times 1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

   •C : "tirer 3 boules vertes".

$$P(C) = P(\emptyset) = 0.$$

$\bullet D$: "obtenir une boule verte".

$$P(D) = \frac{C_1^1 C_4^2}{C_5^3} = \frac{1 \times 6}{10} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

3. $\bullet P(B \cap D) = \frac{C_3^1 C_1^1 C_1^1}{C_5^3} = \frac{3\times1\times1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3.$
   $\bullet P(B/D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2} = 0,5.$
4. $\bullet P(B \cap D) = 0,3 \neq 0$, alors les événements B et D ne sont pas incompatibles.
   $\bullet P(B \cap D) = 0,3 \neq P(B)P(D) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$, alors les événements B et D ne sont pas indépendants.

Exercice 5 : Les événements et les probabilités associés à ce problème sont :
M : "la personne est malade".
T : "le test est positif".

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{11}{100} = 0.11, P(T/M) = 0.99 \ \textit{et}\ P(T/\overline{M}) = 0.001. \\ P(\overline{M}) &= 1 - P(M) = 1 - 0.11 = 0.89. \end{aligned}$$

Les deux événements M et $\overline{M}$ forment un système complet d'événements.

1. Calcul de la probabilité pour que le test soit positif $P(T)$:

$$\begin{aligned} P(T) &= (P(T/M)P(M)) + (P(T/\overline{M})P(\overline{M})) \\ &= (0.99 \times 0.11) + (0.001 \times 0.89) = 0.1089 + 0.00089 = 0.10979. \end{aligned}$$

2. Si $P(M/T) \geq 0.99$, alors le test est fiable.

$$\begin{aligned} P(M/T) &= \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(T/M)P(M)}{P(T)} \\ &= \frac{0.99 \times 0.11}{0.10979} = 0.99189 \geq 0.99. \end{aligned}$$

Donc le test est fiable.

Chapitre

Variables aléatoires

Après avoir réalisé une expérience, on s'intéresse souvent à une certaine fonction du résultat et non au résultat en lui-même. Un nombre est associé à chaque résultat de l'expérience : nombre de particules émises par un élément radioactif durant un intervalle de temps donné, puissance moyenne d'un "bruit" accompagnant la réception d'un signal radio, nombre d'enfants dans une famille, etc. Ces grandeurs (ou fonctions) auxquelles on s'intéresse sont en fait des fonctions réelles définies sur l'ensemble fondamental et sont appelées **variables aléatoires**.
On considère un ensemble Ω muni d'une probabilité P.

Définition 6.1. Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, telle que que l'inverse de chaque intervalle de $\mathbb{R}$ est un événement de Ω.

On distingue deux types de variables aléatoires :

1. les variables aléatoires discrètes ;
2. les variables aléatoires continues.

1 Variables aléatoires discrètes

Définition 6.2. Une variable aléatoire est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées (exemple : valeurs entières).

Exemple 6.1. En lançant un dé à six faces numérotées et en observant la face supérieure, l'ensemble fini des valeurs obtenues est : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies, c'est à dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si l'on définit la probabilité $p(X = x_i) = p_i$ des valeurs x_i. Cette probabilité $p(X = x_i) = p_i$, est appelée la distribution ou la loi de probabilité de X, que l'on donne habituellement sous la forme du tableau suivant (tableau 6.1) :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_3)$	$\dots$	$p(X = x_n)$

TABLE 6.1 – La loi d'une variable aléatoire

La loi de probabilité satisfait les conditions :

$$0 \leq p(X = x_i) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1.$$

Exemple 6.2. On jette une paire de dès bien équilibrés et on obtient l'ensemble fondamental Ω dont les éléments sont les 36 couples ordonnés des nombres allant de 1 à 6.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), ..., (6,5), (6,6)\}.$$

On suppose que la v.a. X est le maximum de point (a, b) de Ω, c'est-à-dire

$$X(a, b) = max(a, b);$$

alors X sera définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\begin{aligned}
p(X = 1) &= p(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36};\\
p(X = 2) &= p(\{(1,2), (2,1), (2,2)\}) = \frac{3}{36};\\
p(X = 3) &= p(\{(1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}) = \frac{5}{36};\\
p(X = 4) &= p(\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}) = \frac{7}{36};
\end{aligned}$$

de la même façon :

$$p(X = 5) = \frac{9}{36} \text{ et } p(X = 6) = \frac{11}{36}.$$

Cette information se résume dans le tableau 6.2.

On suppose maintenant une autre variable aléatoire Y, c'est la somme de composantes des couples (a, b), c'est-à-dire $Y(a, b) = a + b$; alors Y est définie par :

$$Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

La distribution de Y est donnée dans le tableau 6.3.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

TABLE 6.2 – La distribution de la v.a. X.

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

TABLE 6.3 – La distribution de la v.a. Y.

1.2 Fonction de distribution et de répartition

1. **Fonction de distribution**

   Cette fonction indique la loi de probabilité de la v.a. X. Elle est représentée par un diagramme en bâtons.

   Exemple 6.3. Les diagrammes qui suivent, donnent une description graphique des distributions des variables aléatoires X (voir figure 6.1) et Y (voir figure 6.2) de l'exemple précédent.

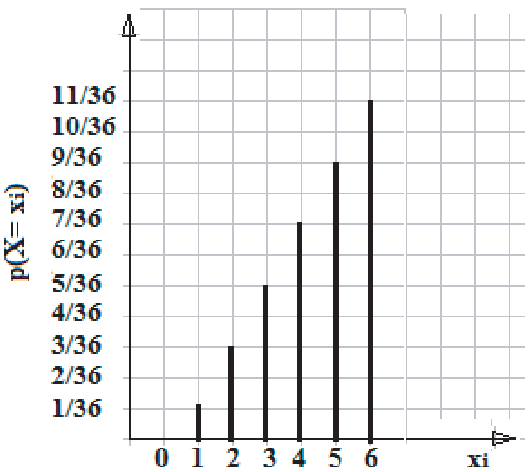


FIGURE 6.1 – Distribution de la v.a. X.

2. **Fonction de répartition**

   La fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x. La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

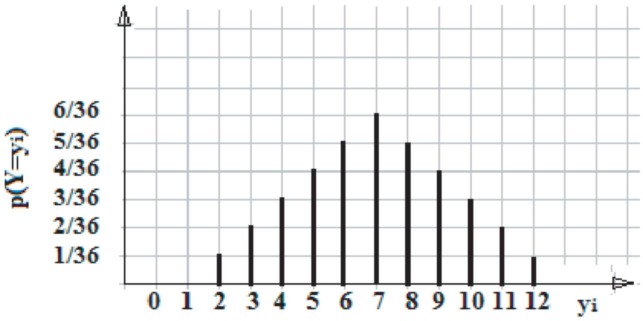


FIGURE 6.2 – Distribution de la v.a. Y.

Remarque 6.1. La représentation graphique de la fonction de répartition du cas discret prend la forme d'un diagramme en escaliers (voir figure 6.3).
F est monotone croissante et prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Exemple 6.4. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1\,; \\ \frac{1}{36}, & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ \frac{4}{36}, & \text{si } 2 \leq x < 3\,; \\ \frac{9}{36}, & \text{si } 3 \leq x < 4\,; \\ \frac{16}{36}, & \text{si } 4 \leq x < 5\,; \\ \frac{25}{36}, & \text{si } 5 \leq x < 6\,; \\ \frac{36}{36} = 1, & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

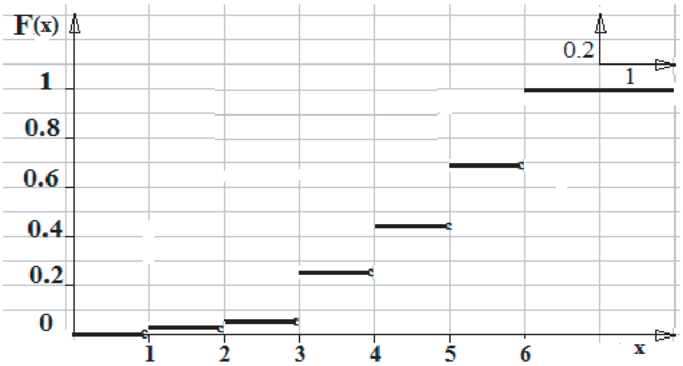


FIGURE 6.3 – Courbe de la fonction de répartition de la v.a. X.

1.3 Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Définition 6.3. Soit X une variable aléatoire ayant la loi de probabilité $p(X = x_i)_{i=\overline{1,n}}$. La moyenne ou l'espérance mathématique de X que l'on note $E(X)$ ou μ_x est la somme des valeurs prises par X pondérées par les probabilités qui leur sont associées (la valeur prise en moyenne par cette v.a.), elle est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1p(X=x_1)+x_2p(X=x_2)+...+x_np(X=x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_ip(X=x_i). \end{aligned}$$

Exemple 6.5. On reprend l'exemple 6.2.

• L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_ip(X=x_i) \\ &= 1.\frac{1}{36}+2.\frac{3}{36}+3.\frac{5}{36}+4.\frac{7}{36}+5.\frac{9}{36}+6.\frac{11}{36} \\ &= \frac{161}{36}=4,47 \end{aligned}$$

• L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} y_ip(Y=y_i) \\ &= 2.\frac{1}{36}+3.\frac{2}{36}+4.\frac{3}{36}+5.\frac{4}{36}+6.\frac{5}{36}+7.\frac{6}{36}+8.\frac{5}{36}+9.\frac{4}{36}+10.\frac{3}{36}+11.\frac{2}{36}+12.\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36}=7. \end{aligned}$$

Propriétés de $E(X)$

Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. $E(\alpha X)=\alpha E(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
4. $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.4 Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète

Définition 6.4. La moyenne d'une variable aléatoire X mesure, dans un certain sens, la valeur moyenne de X et la variance (ou sa racine carrée est l'écart-type) exprime à quel point les valeurs prises par une variable aléatoire X sont dispersées autour de la moyenne.

1. **Variance de la variable aléatoire X**
   La variance de X, que l'on note $V(X)$ est définie par

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$$

ou

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i))^2.$$

2. **Écart type de la variable aléatoire X**
   L'écart type de X, que l'on note $\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 6.6. Considérons les variables aléatoires X et Y de l'exemple 6.2, avec leurs moyennes $E(X) = 4,47$ et $E(Y) = 7$.

- La variance de la variable aléatoire X est donnée par $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) \\ &= 1^2.\frac{1}{36} + 2^2.\frac{3}{36} + 3^2.\frac{5}{36} + 4^2.\frac{7}{36} + 5^2.\frac{9}{36} + 6^2.\frac{11}{36} \\ &= \frac{191}{36} = 21,97. \end{aligned}$$

Par conséquent $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 21,97 - (4,47)^2 = 1,99$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,99} = 1,4$.

- La variance de la variable aléatoire Y est donnée par $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 p(Y = y_i) \\ &= 2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + 5^2\frac{4}{36} + 6^2\frac{5}{36} + 7^2\frac{6}{36} + 8^2\frac{5}{36} + 9^2\frac{4}{36} + 10^2\frac{3}{36} + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36} \\ &= = 54,8. \end{aligned}$$

Par conséquent $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 54,8 - (7)^2 = 5,8$ et $\sigma(Y) = \sqrt{5,8} = 2,4$.

Propriétés de $V(X)$ et $\sigma(X)$

Désignons par X une variable aléatoire définie sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $V(X + \alpha) = V(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

D'où

1. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\sigma(\alpha X) = |\alpha| \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 6.2. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ, on définit la variable aléatoire centrée réduite X^* correspondant à X par

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

avec $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.

2 Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes valeurs comprises dans un intervalle $]a, b]$.

Exemple 6.7. Le poids d'un enfant à la naissance est compris entre $2,7$ kg et $5,6$ kg.

2.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable continue X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x).$$

La fonction F_X indique la probabilité que X soit strictement inférieure à tout x de l'intervalle de définition.

Propriétés

1. $F_X(x)$ est positive et : $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
2. Si la fonction F_X est continue et admet une dérivée, la variable aléatoire est dite absolument continue.

3. La représentation graphique de F_X prend la forme d'une courbe cumulative.

Remarque 6.3. Dans le cas d'**une variable aléatoire continue**, on a :

1. La probabilité attachée à un point x est nulle : $p(X = x) = 0$.
2. $p(X \leq x) = p(X < x) + p(X = x) = p(X < x)$.
3. La probabilité que la v.a. $X \in [a, b]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= p(a < X \leq b) \\ &= p(a \leq X < b) \\ &= p(a < X < b) \\ &= p(X < b) - p(X < a) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

2.2 Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est l'intervalle $[a, b]$. Rappelons que par définition

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire continue X. Cette fonction satisfait les conditions suivantes :

1. $f(x) \geq 0$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

2.3 Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f, dont le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$.

1. **Espérance mathématique**
   L'espérance mathématique de la v.a. X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

2. **Variance et écart type**
   La variance de la v.a. X est définie par :

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

   Par définition, l'écart type est donné par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 6.8. Soit X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité (fonction de distribution) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x), & \text{si } 0 \leq x \leq 2\,; \\ 0, & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

1. La densité de probabilité vérifie :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

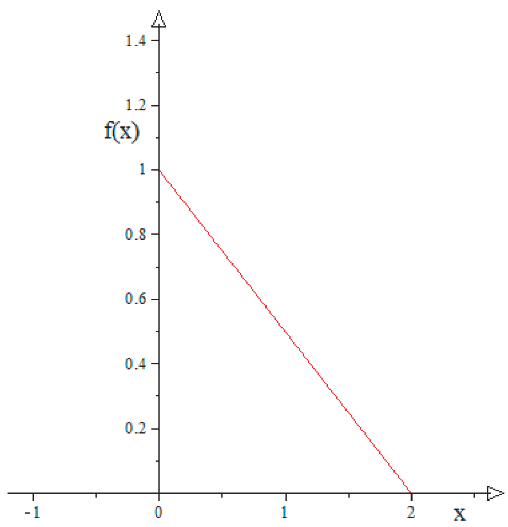


Figure 6.4 – Densité de probabilité de la v.a. X.

   En effet,

$\forall x \in [0,2]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(x) = 0$ ailleurs ;

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}[2x - \frac{x^2}{2}]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(4-2-0) = 1.
\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F est :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ x - \frac{1}{4}x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2\,; \\ 1, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

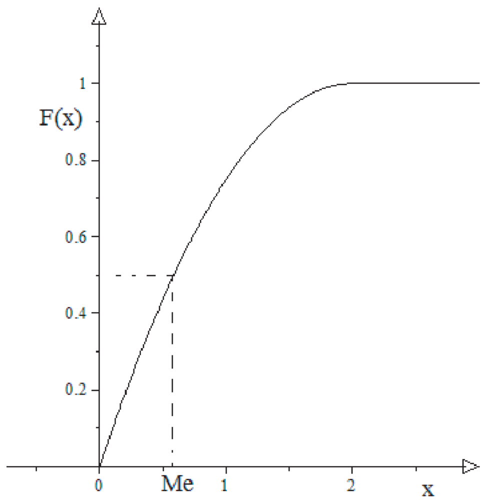


Figure 6.5 – Fonction de répartition de la v.a. X.

3. L'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_0^2 xf(x)dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x(2-x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}[x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. La variance de X :

$$\begin{aligned} V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - E(X)^2 &= \int_0^2 x^2f(x)dx - E(X)^2 \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x^2(2-x)dx - (\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^2-x^3)dx - (\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}]_0^2 - (\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

5. L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2.4 Médiane et mode d'une variable aléatoire continue

La médiane

La médiane d'une variable aléatoire continue est le nombre réel Me tel que

$$F(Me) = 0.5 = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, la médiane c'est la valeur Me de X tel que $p(X < Me) = 0.5$.

Le mode

Le mode Mo est la valeur de X, qui correspond à un maximum de la fonction de densité. Il peut exister plusieurs modes, si il existe un seul maximum la densité est dite unimodale.

Exemple 6.9. Dans l'exemple 6.8, on a

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} \text{ ou } x = \frac{4+\sqrt{8}}{2}.$$

$$x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} \simeq 0,5857864376 \in [0;2]$$

et

$$x = \frac{4+\sqrt{8}}{2} \simeq 3.414213562 \notin [0;2],$$

alors

$$Me = \frac{4-\sqrt{8}}{2}.$$

f admet un maximum pour la valeur de $x = 0$, alors $Mo = 0$.

3 Exercices et corrigés

3.1 Exercices

Exercice 1 : La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est donnée par le tableau suivant :

Modalités x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$2a$	a	a

1. Trouver la valeur de la constante a.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. Déduire son écart type.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 2 : Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher portant les numéros 0, 1, 1, 2, 2 et 4. On tire une poignée de n jetons ($n = 4$ ou 5) et on appelle X_n le produit des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité des variables aléatoires X_4 et X_5.
2. Calculer l'espérance mathématique de X_4 et X_5.
3. Calculer la variance et l'écart type de X_4.
4. Si l'on veut maximiser le produit obtenu, vaudrait-il mieux tirer 4 ou 5 jetons ?

Exercice 3 : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules blanches obtenues.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus une boule blanche.

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire ayant pour densité de probabilité la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda.e^{(-\lambda x)}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où λ est une constante réelle positive.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+1}, & \text{si } x \in [0,1]\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

1. Trouver la valeur de a pour que f.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer la probabilité $P(\frac{1}{2} < X \leq 5)$.

3.2 Corrigés

Exercice 1 : La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X vérifie les conditions : $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ pour tout i et et $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

1. La valeur de la constante a doit vérifier les deux conditions.
   (a) $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ pour tout i, nous permet de déduire que $a \geq 0$.
   (b) $\sum_i P(X = x_i) = 1 \Rightarrow 2a + a + a = 4a = 1$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{4}$.

   Pour cette valeur de a, la loi de probabilité de X sera définie ainsi :

Modalités x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. L'espérance mathématique et la variance de X :
   (a) L'espérance mathématique de X :
   $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i P(X = x_i) \\ &= (0 \times \frac{2}{4}) + (1 \times \frac{1}{4}) + (2 \times \frac{2}{4}) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$
   (b) La variance de X :
   $$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - \Big(E(X)\Big)^2 \\ &= \Big((0^2 \times \frac{2}{4}) + (1^2 \times \frac{1}{4}) + (2^2 \times \frac{2}{4})\Big) - \Big(\frac{3}{4}\Big)^2 = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

L'écart type de la variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

3. Fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{x_i \leq x} P(X = x_i)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ \frac{2}{4}, & \text{si } 0 \leq x < 1\,; \\ \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 2 : Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher portant les numéros 0, 1, 1, 2, 2 et 4. On tire une poignée de n jetons ($n = 4$ ou 5) et X_n est la v.a. correspondant au produit des numéros obtenus.

1. Lois de probabilité des variables aléatoires X_4 et X_5 :

   (a) La loi de probabilité de la v.a. X_4 :

Modalités x_i	0	4	8	16
$P(X_4 = x_i)$	$\frac{C_1^1 C_5^3}{C_6^4} = \frac{10}{15}$	$\frac{C_2^2 C_2^2}{C_6^4} = \frac{1}{15}$	$\frac{C_2^1 C_3^3}{C_6^4} = \frac{2}{15}$	$\frac{C_2^1 C_3^3}{C_6^4} = \frac{2}{15}$

   Notant que $0 \leq P(X_4 = x_i) \leq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $\sum\limits_{i=1}^{4} P(X_4 = x_i) = 1$.

   (b) La loi de probabilité de la v.a. X_5 :

Modalités x_i	0	16
$P(X_5 = x_i)$	$\frac{C_1^1 C_5^4}{C_6^5} = \frac{5}{6}$	$\frac{C_5^5}{C_6^5} = \frac{1}{6}$

   On a aussi $0 \leq P(X_5 = x_i) \leq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\sum\limits_{i=1}^{2} P(X_5 = x_i) = 1$.

2. Calcul des espérances mathématiques :

   (a) L'espérance mathématique de X_4 :

$$\begin{aligned} E(X_4) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X_4 = x_i) = 0(\frac{10}{15}) + 4(\frac{1}{15}) + 8(\frac{2}{15}) + 16(\frac{2}{15}) \\ &= \frac{52}{15}. \end{aligned}$$

   (b) L'espérance mathématique de X_5 :

$$E(X_5) = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X_5 = x_i) = 0(\frac{5}{6}) + 16(\frac{1}{6}) = \frac{16}{6}.$$

3. Calcul de la variance et l'écart type de X_4 :
   Rappelant que $V(X_4) = E(X_4^2) - (E(X_4))^2$.
   On a

$$\begin{aligned} E(X_4^2) &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X_4 = x_i) = 0^2(\frac{10}{15}) + 4^2(\frac{1}{15}) + 8^2(\frac{2}{15}) + 16^2(\frac{2}{15}) \\ &= \frac{656}{15}. \end{aligned}$$

   Par conséquent,

$$V(X_4) = E(X_4^2) - (E(X_4))^2 = \frac{656}{15} - (\frac{52}{15})^2 = 31.71555$$

   L'écart type de X_4 est $\sigma(X_4) = \sqrt{V(X_4)} = 5.63165$.

4. On a $E(X_5) \simeq 2.6666 < E(X_4) \simeq 3.4666$, donc si on veut maximiser le produit obtenu, vaut mieux tirer 4 jetons.

Exercice 3 : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. Tirage successif de trois boules de l'urne et sans remises.
La v.a. X représente le nombre de boules blanches obtenues.

1. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Modalités x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{A_3^0 A_4^3}{A_7^3} = \frac{4}{35}$	$\frac{A_3^1 A_4^2}{A_7^3} = \frac{18}{35}$	$\frac{A_3^2 A_4^1}{A_7^3} = \frac{12}{35}$	$\frac{A_3^3 A_4^0}{A_7^3} = \frac{1}{35}$

   Notant que $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1$.

2. Fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ \frac{4}{35}, & \text{si } 0 \leq x < 1\,; \\ \frac{4}{35} + \frac{18}{35} = \frac{22}{35}, & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ \frac{4}{35} + \frac{18}{35} + \frac{12}{35} = \frac{34}{35}, & \text{si } 2 \leq x < 3\,; \\ \frac{4}{35} + \frac{18}{35} + \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{35}{35}, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

   En résumé

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ \frac{4}{35}, & \text{si } 0 \leq x < 1\,; \\ \frac{22}{35}, & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ \frac{34}{35}, & \text{si } 2 \leq x < 3\,; \\ \frac{35}{35}, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

3. La probabilité d'obtenir au plus une boule blanche est

$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{22}{35}.$$

Juste à titre de rappel, obtenir **au plus** une boule blanche correspond à obtenir 0 boules blanches ou 1 boule blanche, autrement dit :

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{35} + \frac{18}{35} = \frac{22}{35}.$$

Exercice 4 : X est une variable aléatoire ayant pour densité de probabilité la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda.e^{(-\lambda x)}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où λ est une constante réelle positive.

1. La fonction f est une densité de probabilité si $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \end{cases}$

   La fonction $f(x)$ vérifie ces deux conditions, elle est positive pour tout x réel et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{(-\lambda x)}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \lambda e^{(-\lambda x)}dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \Big[\frac{-\lambda}{\lambda} e^{(-\lambda x)}\Big]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \Big[-e^{(-\lambda x)}\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{(-\lambda b)}\right) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

2. Fonction de répartition de X : $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

   (a) Si $x < 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0.dt = 0$.

   (b) Si $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{(-\lambda t)}dt = 1 - e^{(-\lambda x)}$.

   D'où

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{(-\lambda x)}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. Calcul de l'espérance mathématique et la variance de X :

   (a) Espérance mathématique de X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \lambda x e^{(-\lambda x)}dx.$$

   Intégration par parties, en posant :

$$\begin{aligned} U = x &\Rightarrow U' = 1; \\ V' = \lambda e^{(-\lambda x)} &\Rightarrow V = -e^{(-\lambda x)}. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{b\to+\infty}\Big(\big[-xe^{(-\lambda x)}\big]_0^b + \int_0^b e^{(-\lambda x)}dx\Big) \\ &= \lim_{b\to+\infty}\Big(-be^{(-\lambda b)} + \big[\frac{-1}{\lambda}e^{(-\lambda x)}\big]_0^b\Big) \\ &= \lim_{b\to+\infty}\Big(-be^{(-\lambda b)} - \frac{1}{\lambda}e^{(-\lambda b)} + \frac{1}{\lambda}\Big) = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

(b) Variance de X : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \lambda x^2 e^{(-\lambda x)}dx.$$

Le calcul de cette intégrale se fait deux fois par parties et on obtient :

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Par conséquent,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Cette densité de probabilité correspond à loi appelée Loi Exponentielle.

Exercice 5 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+1}, & \text{si } x \in [0,1]\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

1. f est une densité de probabilité si elle vérifie les conditions suivante :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

i) La première condition est vérifiée pour $a \geq 0$, sachant que f est continue et définie sur $\mathbb{R}$.
ii) La deuxième condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ est vérifiée pour $a = \frac{1}{\ln(2)}$.
En effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = a\big[ln(x+1)\big]_0^1 = a\big(\ln(2) - \ln(1)\big) = a\ln(2).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, nous permet de déduire que $a\ln(2) = 1$. Par conséquent

$$a = \frac{1}{\ln(2)}.$$

2. Calcul de l'espérance mathématique et la variance de X :

   (a) L'espérance mathématique de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \big(1-\frac{1}{x+1}\big)dx = \frac{1}{\ln(2)}\big[x-\ln(x+1)\big]_0^1 \\ &= \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} - 1. \end{aligned}$$

   (b) La variance de X : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
   Commençant par le calcul de $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \big(\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\big)dx \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \big(x-1+\frac{1}{x+1}\big)dx = \frac{1}{\ln(2)}\big[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\big(\frac{-1}{2}+\ln(2)\big) = 1 - \frac{1}{2\ln(2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \big(1-\frac{1}{2\ln(2)}\big) - \big(\frac{1}{\ln(2)}-1\big)^2 \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\big(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln(2)}\big) \simeq 0.082673. \end{aligned}$$

3. Fonction de répartition de X :

   (a) Si $x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

   (b) Si $0 < x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{\ln(2)}\int_0^x \frac{1}{t+1}dt \\ &= 0 + \frac{1}{\ln(2)}\big[\ln(1+t)\big]_0^x = \frac{1}{\ln(2)}\ln(1+x). \end{aligned}$$

(c) Si $1 \geq x$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{\ln(2)} \int_{0}^{1} \frac{1}{t+1} dt + \int_{1}^{+\infty} 0dt \\ &= 0 + \frac{1}{\ln(2)} \big[\ln(1+t) \big]_{0}^{1} + 0 = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0\,; \\ \frac{1}{\ln(2)} \ln(1+x), & \text{si } 0 < x \leq 1\,; \\ 1, & \text{si } 1 \geq x. \end{cases}$$

4. $P(\frac{1}{2} < X \leq 5) = F(5) - F(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln(1 + \frac{1}{2}) \simeq 0.41503.$