Université Abderrahmane Mira de Béjaïa.
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Département de la formation des enseignements de base SEGC-LMD
Première année. Toutes les sections.

Mardi 14/09/2021

Durée : 01h30min

Rattrapage de Microéconomie 2

Recommandations :

1. Présentez une copie propre et bien rédigée.
2. Veillez au respect du bon déroulement des examens.
3. Utilisez vos propres outils (calculatrice, stylos, crayons,…).
4. L'utilisation du portable n'est pas autorisée.
5. Les réponses aux questions doivent être brèves, concises et argumentées.
6. Justifiez par le calcul les résultats trouvés.

Partie 1 : Les productivités physiques des facteurs de production (07,50 points)

Soit $P = f(k, l) = k^2 l^2 - \frac{1}{3} k^2 l^3$, la fonction de production de courte période d'un producteur rationnel.

1) Donnez les expressions mathématiques de la productivité physique totale, moyenne et marginale pour le facteur **K.** ***(01,5 pts)***

Considérons que la quantité utilisée du facteur **K** est fixe, telle que $\mathbf{k = k_0 = 3}$.

2) Quelle est la quantité du facteur **L** pour laquelle la productivité totale serait maximale ? ***(01,5 pts)***

3) A partir de quelle quantité de **L** la productivité totale ralentit ? ***(01,5 pts)***

4) Déterminez par deux méthodes la quantité de **L** à partir de laquelle la productivité moyenne diminue. ***(03 pts)***

Partie 2 : La maximisation de la fonction de production et les variations de la production (12,5 points)

Le comportement rationnel d'un producteur **(E)** est décrit par la fonction de production ci-dessous :

$$\mathbf{P = f(k, l) = \frac{4}{3} k\, l^{0,5}}.$$

Les prix unitaires des facteurs K et L utilisés sont, respectivement, $\mathbf{P_K = 200\ DA}$ et $\mathbf{P_L = 50\ DA}$. Le montant des ressources disponibles du producteur (CT=RD) est de $\mathbf{3000\ DA}$.

1) Déterminez la combinaison optimale des facteurs de production **K** et **L**. ***(02 pts)***

2) Quelle est la variation nécessaire des ressources disponibles pour atteindre un niveau de production de **100 unités** ***(prenez deux chiffres après la virgule)*** ? ***(02,5 pts)***

3) **P** est-elle une fonction de production homogène ? ***(01,5 pts)***

4) Quelle sera la variation en pourcentage de la production si les quantités des facteurs de production capital et travail diminuent simultanément de **20%** ***(prenez deux chiffres après la virgule)*** ? ***(02 pts)***

5) Le producteur décide de diminuer la quantité du facteur travail de **12 unités**, quelle est la variation nécessaire du facteur capital pour qu'il puisse produire la quantité produite à l'équilibre ? ***(02,5 pts)***

6) Quelle est la variation relative du facteur capital permettant d'accroître la production de **25%** ***(toutes choses égales par ailleurs)*** ? ***(02 pts)***

Travaillez-bien !
L'équipe pédagogique.

Corrigé-type. Rattrapage-Microéconomie 2

Partie 1 : Les productivités physiques des facteurs de production (07,50 points)

$$P = f(k,l) = k^2l^2 - \frac{1}{3}k^2l^3$$

1) Donnez les expressions mathématiques de la productivité physique totale, moyenne et marginale pour le facteur **K.** ***(01,5 pts)***

a) La productivité physique totale du facteur K

$PPT_K = f(k, l_0) = k^2l_0^2 - \frac{1}{3}k^2l_0^3$ $\quad(\mathbf{0,5})$

b) La productivité physique marginale du facteur K

$PPmg_K = \frac{d\,PPT_k}{d\,k} = \frac{df(k,l_0)}{d\,k} = 2kl_0^2 - \frac{2}{3}kl_0^3$ $\quad(\mathbf{0,5})$

c) La productivité physique moyenne du facteur K

$PPM_K = \frac{PPT_k}{k} = \frac{f(k,l_0)}{k} = \frac{k^2l_0^2 - \frac{1}{3}k^2l_0^3}{k} = kl_0^2 - \frac{1}{3}kl_0^3$ $\quad(\mathbf{0,5})$

2) Quelle est la quantité du facteur L pour laquelle la productivité totale serait maximale ? ***(01,5 pts)***

PPT_l est maximale $\Leftrightarrow \frac{d\,PPT_l}{d\,l} = 0 \Leftrightarrow PPmg_l = 0$. Sachant que $k = k_0 = 3$, l'expression de la productivité physique totale du facteur travail devient : $PPT_l = f(k_0, l) = f(3, l) = 9l^2 - \frac{9}{3}l^3 = 9l^2 - 3l^3$ $\quad(\mathbf{0,5})$

$\frac{d\,PPT_l}{d\,l} = 0 \Leftrightarrow 18l - 9l^2 = 0$ $(\mathbf{0,5})$ $\Leftrightarrow l(18 - 9\,l) = 0 \Leftrightarrow l = \frac{18}{9} = 2\,unités$ $\quad(\mathbf{0,5})$

Donc, la quantité de L qui maximise la productivité physique totale est **l = 2 unités**

3) A partir de quelle quantité de L la productivité totale ralentit ? ***(01,5 pts)***

La quantité de L, dans ce cas, correspond au point d'inflexion sur la courbe représentative de la productivité physique totale du facteur L…. $(\mathbf{0,5})$. On aura donc :

$\frac{d^2PPT_l}{dl^2} = 0 \Leftrightarrow 18 - 18\,l = 0$ $(\mathbf{0,5})$ $\Leftrightarrow l = \frac{18}{18} = 1\,unité$ $\quad(\mathbf{0,5})$

A partir de l = 1 unité, la productivité physique totale du facteur L augmente avec un taux décroissant (ralentissement de la productivité physique totale).

4) Déterminez par deux méthodes la quantité de L à partir de laquelle la productivité moyenne diminue. ***(03 pts) :*** La productivité physique moyenne du facteur L diminue après son maximum, donc pour répondre à cette question on doit déterminer, par deux méthodes, la quantité de L qui maximise la productivité physique moyenne.

$PPM_l = \frac{PPT_l}{l} \Leftrightarrow PPM_l = 9l - 3l^2$ $\mathbf{(0,5)}$

$\mathrm{PPmg_l} = \frac{d\,PPT_l}{d\,l} \Leftrightarrow \mathrm{PPmg_l} = 18l - 9l^2$ $\mathbf{(0,5)}$

Première méthode

La PPM$_l$ est maximale, lorsque sa première dérivée par rapport à (l) est nulle :

$\frac{dPPM_l}{dl} = 0 <=> 9 - 6l = 0$ $\mathbf{(0,5)}$ $<=> \boldsymbol{l} = \frac{9}{6} = \mathbf{1,5}$ ***unit***é. $\mathbf{(0,5)}$

Alors, la quantité de L qui maximise la productivité physique moyenne est **l = 1,5 unité**

Deuxième méthode

On sait que lorsque la courbe de la productivité moyenne passe son maximum, elle coupe celle de la productivité marginale. On a donc, une égalité entre les deux productivités :

$\mathrm{PPM_l} = \mathrm{PPmg_l} \Leftrightarrow 9\mathrm{l} - 3l^2 = 18\mathrm{l} - 9\mathrm{l}^2$ $\mathbf{(0,5)}$ $\Leftrightarrow 9 - 3\mathrm{l} = 18 - 9\mathrm{l} \Leftrightarrow 6\mathrm{l} = 9 \Leftrightarrow \mathbf{l} = \frac{9}{6} = \mathbf{1,5\ unit}$é $\mathbf{(0,5)}$. On parvient au même résultat en utilisant les deux méthodes. Donc, la productivité physique moyenne commence à décroître dès que la valeur de L soit supérieure à 1,5 unité.

Partie 2 : La maximisation de la fonction de production et les variations de la production (12,5 points)

$\mathbf{P = f(k,l) = \frac{4}{3} k\, \boldsymbol{l}^{\,0,5}}$. , $\mathbf{P_K = 200\ DA}$ et $\mathbf{P_L = 50\ DA}$. Le montant des ressources disponibles du producteur (CT=RD) est de $\mathbf{3000\ DA}$.

1) Déterminez la combinaison optimale des facteurs de production **K** et **L**. ***(02 pts)***

a. Formalisation du problème : $\begin{cases} \mathrm{Max}\ \mathrm{p} = \mathrm{f(k,l)} \\ \mathrm{S/C} \\ \mathrm{RD} = p_k\mathrm{k} + \mathrm{p}_l\mathrm{l} \end{cases} <=> \begin{cases} \mathrm{Max}\ \mathrm{p} = \frac{4}{3}\ \mathrm{k\,l^{0,5}} \\ \mathrm{S/C} \\ 3000 = 200\mathrm{k} + 50\mathrm{l} \end{cases}$

b. Construction de la fonction de Lagrange :

$\mathrm{L(k,l,\lambda) = f(k,l) + \lambda\,(RD - P_k k - P_l l)}$

$\mathrm{L(k,l,\lambda)} = \frac{4}{3}\ \mathrm{k\,l^{0,5}} + \lambda\,(3000 - 200\mathrm{k} - 50\mathrm{l})$

$\mathrm{L(k,l,\lambda)} = \frac{4}{3}\ \mathrm{k\,l^{0,5}} + 3000\lambda - 200\lambda\mathrm{k} - 50\lambda\mathrm{l}$

c. Résolution du problème :

La fonction de Lagrange (L) atteint son maximum lorsque ses dérivées partielles par rapport à $(k, l\ et\ \lambda)$ sont égales à zéro :

$$\mathrm{Max\ L(k,l,\lambda)} <=> \begin{cases} \frac{\partial\,\mathrm{L(k,l,\lambda)}}{\partial \mathrm{k}} = 0 \\ \frac{\partial\,\mathrm{L(k,l,\lambda)}}{\partial \mathrm{l}} = 0 \\ \frac{\partial\,\mathrm{L(k,l,\lambda)}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{k}} - \lambda\,\mathrm{P_k} = 0 \\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{l}} - \lambda\,\mathrm{P_l} = 0 \\ \mathrm{RD - kP_k - lP_l} = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{k}}}{\mathrm{P_k}} \\ \lambda = \frac{\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{l}}}{\mathrm{P_l}} \\ \mathrm{RD = kP_k + lP_l} \end{cases} <=> \begin{cases} \lambda = \frac{\mathrm{Pmg_k}}{\mathrm{P_k}} \\ \lambda = \frac{\mathrm{Pmg_l}}{\mathrm{P_l}} \\ \mathrm{RD = P_k k + P_l l} \end{cases}$$

$$<=>\begin{cases}\lambda = \frac{4\ l^{0,5}}{3(200)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)\\ \lambda = \frac{4(0,5)k\ l^{-0,5}}{3(50)} \ldots\ldots\ldots (2)\\ 3000 = 200\ k + 50\ l \ldots\ldots (3)\end{cases}$$ On a :

$$(1) = (2) <=> \begin{cases}\frac{4\ l^{0,5}}{3(200)} = \frac{4(0,5)k\ l^{-0,5}}{3(50)} \ldots\ldots (4)\\ 3000 = 200\ k + 50\ l \ldots (3)\end{cases} <=> \begin{cases} l = 2k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)\\ 3000 = 200\ k + 50\ l \ldots (3)\end{cases}$$. On remplace (l) par (2k) dans l'équation du budget (3), on obtient:

$3000 = 200k + 50\ (2k) <=> 3000 = 300\ k <=> k = \mathbf{10\ Unités}$.

$l = 2 * k = 2 * 10 = \mathbf{20\ Unités}$.

Donc, la combinaison de facteurs (k, l) = (10, 20) est celle qui permet au producteur de maximiser le volume de production pour des ressources disponibles égales à 3000 DA ***(02pts)***

2) Quelle est la variation nécessaire des ressources disponibles pour atteindre un niveau de production de 100 unités *(prenez deux chiffres après la virgule)* ? *(02,5 pts)*

On doit, tout d'abord, calculer la variation de la production :

$$\mathbf{p}_{\max} = f(10,20) = \frac{4}{3}\ (10)(20)^{0,5}\ \cong \mathbf{59,63}\ \boldsymbol{unités} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\Delta P = p - \mathbf{p}_{\max} = 100 - 59,63 = 40,37\ unités \qquad \textbf{(0,5)}$$

Puis, on détermine la valeur de λ :

$$\begin{cases}\lambda = \frac{4\ l^{0,5}}{3(200)} \ldots\ldots\ldots (1)\\ \lambda = \frac{4(0,5)k\ l^{-0,5}}{3(50)} \ldots (2)\end{cases} <=> \begin{cases}\lambda = \frac{4\ (20)^{\ 0,5}}{3(200)} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)\\ \lambda = \frac{4(0,5)(10)\ (20)^{-0,5}}{3\ (50)} \ldots. (2)\end{cases} <=> \begin{cases}\lambda \cong 0,03\ \text{Unités/DA} \ldots\ldots\ldots (1)\\ \lambda \cong 0,03\ \text{Unités/DA} \ldots\ldots\ldots (2)\end{cases} \quad \textbf{(01pt)}$$

$\lambda = 0,03$, c'est-à-dire que le volume de production s'accroît de la valeur λ (0,03 $Unité$) à chaque accroissement de 1 DA de ressources disponibles $\left(\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta RD}\right)$.

On a : $\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta RD} => \Delta RD = \frac{\Delta P}{\lambda}$. AN: $\Delta RD = \frac{+40,37}{0,03} = 1345,67\ DA$ $\quad(\mathbf{0,5})$

Il faut une augmentation de **1345,67 DA** des ressources disponibles (RD) pour atteindre un volume de production de **100** unités.

Ou bien :

	ΔRD	**ΔP**	
$\lambda = \mathbf{0,03}$	+1DA	+0,03 Unité	$=> \Delta RD = \frac{(+40,37)*(+1)}{(+0,03)} = \mathbf{+1345,67DA}$.
	ΔRD	+40,37 Unités	

3) P est-elle une fonction de production homogène ? *(01,5 pts)*

« p » est homogène ssi : ∀ a ∈ $\mathcal{R}^{+}$-{0}, on a toujours : $f(ak, al) = a^{\lambda} f(k, l) = a^{\lambda} p$

$$f(ak, al) = \frac{4}{3}.(ak).(al)^{0,5} = a^{1}a^{0,5}.\frac{4}{3}\ k\ l^{0,5} = a^{1+0,5}.\frac{4}{3}\ k\ l^{0,5} = a^{1,5}\ f(k, l) = a^{1,5}\ p \ \textbf{(01pt)}$$

Donc, la fonction de production « p » est homogène de degré λ =1,5 ***(0,5)***

4) Quelle sera la variation en pourcentage de la production si les quantités des facteurs de production capital et travail diminuent simultanément de 20% ***(prenez deux chiffres après la virgule)*** **?** ***(02 pts)***

Une diminution simultanée des quantités utilisées des facteurs de production K et L de 20%, correspond à leur multiplication par 0,8 dans la fonction de production, on aura donc :

$$f(0{,}8k, 0{,}8l) = 0{,}8^{1{,}5}\, f(k, l) \cong 0{,}71\, p \ (\mathbf{01}\boldsymbol{pt})$$

La variation en pourcentage de la production :

$$\frac{\Delta p}{p} * 100\% = \left(\frac{0{,}71\mathrm{p} - \mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right) * 100\% = -29\% \ \ (\mathbf{01}\boldsymbol{pt})$$

Donc, le volume de production subit une diminution de 29% suite à une réduction simultanée des quantités utilisées des facteurs de production de 20%.

5) Le producteur décide de diminuer la quantité du facteur travail de **12 unités**, quelle est la variation nécessaire du facteur capital pour qu'il puisse produire la quantité produite à l'équilibre ? ***(02,5 pts)***

$$\mathrm{TMST}_{\mathrm{K\,à\,L}} = \frac{\mathrm{PPmg}_{\mathrm{K}}}{\mathrm{PPmg}_{l}} = \frac{\frac{4}{3}l^{0{,}5}}{(0{,}5)\frac{4}{3}kl^{-0{,}5}} = \frac{l}{0{,}5k} = \frac{20}{0{,}5\,(10)} = 4 \ \ (\mathbf{01}\boldsymbol{pt})$$

D'après la valeur du $\mathrm{TMST}_{\mathrm{K\,à\,L}}$, on a :

	Δl	Δk	Δp	
$\mathrm{TMST}_{\mathrm{K\,à\,L}} = 4$	- 4 Unités	+1 Unité	0	$=> \Delta\mathrm{k} = \frac{(+1)*(-12)}{(-4)} = +\mathbf{3}$ **Unités.** ***(01,5pt)***
	-12 Unités	Δk	0	

L'entreprise garde constante la quantité produite à l'équilibre, si elle augmente la quantité utilisée du facteur capital (K) de 3 unités tout en diminuant la quantité utilisée du facteur travail (L) de 12 unités.

6) Quelle est la variation relative du facteur capital permettant d'accroître la production de 25% ***(toutes choses égales par ailleurs)*** **?** ***(02 pts)***

$$\mathrm{e}_{\mathrm{p/k}} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{k}} * \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{P}} = \frac{(4)\ \mathrm{l}^{\,0{,}5}}{(3)} * \frac{\mathrm{k}}{\frac{4}{3}\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{l}^{0{,}5}} = 1 \qquad (\mathbf{01}\boldsymbol{pt})$$

On a :

	Δk/k	ΔP/P	
$\mathrm{e}_{\mathrm{p/k}} = 1$	+1%	+1%	$=> \frac{\Delta\mathrm{k}}{k} = \frac{(+1\%)*(+25\%)}{(+1\%)} = +\mathbf{25}\%.$ ***(01 pt)***
	Δk/k	+25%	

Ou encore :

$\mathrm{e}_{\mathrm{p/k}} = \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta k}{k}} => \frac{\Delta k}{k} = \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\mathrm{e}_{\mathrm{p/k}}} = \frac{+25\%}{1} = +25\%.$ Donc, pour une augmentation du volume de production de 25%, la quantité utilisée du facteur capital doit augmenter dans la même proportion.