Table des matières

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

Chapitre 2

Les applications linéaires

Chapitre 3

Les matrices

Chapitre 4

Résolution des systèmes linéaires

4.1 Définitions

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 4.1. On appelle **système à p équations linéaires, a n inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$**, un système tel que :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p, \end{cases}$$

Les éléménts $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont appelés coefficients (donnés).

Les éléménts $b_i \in \mathbb{K}$ sont appelés seconds membres (donnés).

Définition 4.2. On appelle **solution** du système ci-dessus, tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ qui vérifie les p équations du système.

Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 4.3. On appelle **matrice** du système, la matrice $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$ des coefficients donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & q_{pn} \end{pmatrix}$$

Interpretation matricielle du système

Soient les matrices colonnes :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le système (S) équivaut à $AX = B$.

Donc résoudre le système (S), c'est résoudre cette équation matricielle. Etant donné $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K}), \quad B \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{K})$, il s'agit de trouver $X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = B$.

4.2 Système de Cramer

Définition 4.4. Le système (S) est dit **système de Cramer** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $n = p$.
2) A est inversible.

Résolution d'un système de Cramer

Considérons l'équation matricielle $AX = B$. Comme A est inversible, donc A^{-1} existe, on a alors $X = A^{-1}B$ qui constitue la solution **unique** de (S).

En remplaçant A^{-1} par $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^tC$ avec ${}^tC$ est la transposée de la comatrice de A, on obtient les formules de Cramer donnant la solution du système (S), donnée par :

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n$$

avec Δ_{x_i} est le déterminant obtenu en remplaçant dans la matrice A la $i^{\text{ème}}$ colonne par la colonne du second membre B.

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \forall \ 1 \leq i \leq n$$

Exemple 4.1. *Résoudre le système* (S) *suivant :*

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ X - y + z = 0, \\ x + y - 2z = -1. \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =_{\substack{l_1+l_2 \\ l_3+2l_2}} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

puisque $\det(A) \neq 0$, *le système est de Cramer. Il admet donc une unique solution.*

$$x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{7}{7} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\det(A)} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{7} = 1$$

4.3 Système général

Nous allons voir que la résolution de tout système linéaire général peut se ramener à la résolution d'un système de Cramer. Considérons le système (S) à m équations et à n inconnues. $(S) : AX = B$.

Définition 4.5. On appelle **rang** de (S), noté $rg(S)$, le rang de la matrice A.

Supposons que $rg(A) = r$. C'est l'ordre maximum d'un déterminant non nul extrait de A Supposons que le déterminant non nul est donné par les r premières lignes et les r première colonnes de la matrice A qu'on note A_r.

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Les inconnues correspondantes aux colonnes de A_r sont dites **inconnues principales**. Les équations correspondantes aux lignes de A_r sont dites **équations principales**.

Définition 4.6. Les déterminants bordant $\Delta_r = |A_r|$, sont appelés **déterminants caractéristiques**. On les note par Δ_s. Ils sont donnés par

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix}, \quad \forall \quad (r+1 \leq s \leq m)$$

Théorème 4.1 **(Rouché-Foutné).** *Un système à m équations linéaires, à n inconnues, de rang r admet au moins une solution si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

(i) $m = r \; (< n)$.

(ii) $\forall s \in \{r+1, r+2, \dots, \dots, m\}, \quad \Delta_s = 0.$

Il y a $m - r$ déterminants caractéristiques.
Dans ce cas, la solution se ramène à celle d'un système de Cramer (à r équations principales et à r inconnues principales) après avoir supprimer les $m - r$ équations non principales, en donnant aux $(n - r)$ inconnues non principales, des valeurs arbitraires (elles sont considérées comme des paramètres).

Remarque 4.1. S'il existe un $\Delta_s \neq 0$ alors le système est impossible.

Exemple 4.2. *Soit le système linéaire (S) suivant :*

$$(S) : \begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ -x - 2y - 5z = -1, \end{cases}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ *et* $\det(A) = 0 \Longrightarrow rg(S) \neq 3$

on a $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow rg(S) = 2.$

Le déterminant caractéristique est $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. *(la première colonne et la troisième sont identiques). Donc le système admet une infinité de solutions. Les inconnues principales étant* x *et* y *donc on se ramène au système de Cramer*

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z, \\ 2x + y = 2 - z, \end{cases}$$

En utilisant les formules de Cramer, on obtient $x = -\begin{vmatrix} 1-2z & 1 \\ 2-z & 1 \end{vmatrix} = z + 1$ *et* $y = -\begin{vmatrix} 1 & 1-2z \\ 2 & 2-z \end{vmatrix} = -3z$.

L'ensemble des solutions est $\{(z+1, -3z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 4.3. *Résoudre le système* (S) *suivant*

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + 2x = 3, \\ 2x + 2y + z = 2, \\ x - 3y + z = 4, \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det(A) = 0$ *comme* $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, *donc* $rg(S) = 2$.

Le déterminant caractéristique de ce système est $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$ *donc le système est impossible (n'a aucune solution).*