1 Les Matrices (chapitre 3)

1.1 Généralités sur les matrices

Cette partie sera consacrée à la définition de la notion de matrice, ainsi qu'à la présentation des différents types de matrices.
$\mathbb{k}$ désigne un corps commutatif.

Définition 1 *Soient n, $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. On note une telle matrice par*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{3p} \\ . & . & & . & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & . & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notations:
1) L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2) Si $p = n$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $M_n(\mathbb{K})$.
Exemples $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ 5 & 22 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ -23 & 19 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Matrices particulières

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
1) Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) Si $n=1$, on dit que A est une matrice ligne

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1p} \end{pmatrix}$$

Exemple $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 18 & 5 & 20 \end{pmatrix}$.

3) Si $a_{ij}=0$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq p$ la matrice A est appelée la matrice nulle et est notée $O_{n,p}$.

4) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $A\in M_n(\mathbb{K})$. Si pour tout i,j tels que $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, et $i\neq j$ on a $a_{ij}=0$, alors la matrice A est dite diagonale.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ . & 0 & . & .. & : \\ : & : & . & . & : \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5) La matrice carrée diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n et est notée I_n.

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ . & 0 & . & .. & : \\ : & : & . & . & : \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $A\in M_n(\mathbb{K})$. Si pour tout i, j tels que $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, et $i>j$ on a $a_{ij}=0$, alors la matrice A est dite triangulaire supérieure.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ . & 0 & . & .. & : \\ : & : & 0 & . & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $A\in M_n(\mathbb{K})$. Si pour tout i, j tels que $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, et $j>i$ on a $a_{ij}=0$, alors la matrice A est dite triangulaire inférieure

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ . & a_{32} & . & .. & : \\ : & : & . & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
la matrice A est triangulaire supérieure et la matrice B est triangulaire inférieure.

1.1.2 Opérations sur les matrices

Egalité de deux matrices Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

On dit que $A = B$ si $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & x-y & 5 \\ 3 & x & -1 \end{pmatrix}$$

$A = B$ si $x - y = 4$ et $x = 6$.

Transposée d'une matrice Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $(a_{ji})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le p}} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et on note ${}^tA$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} ; {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Multiplication par un scalaire

Soients $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de A par λ est la matrice $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} ; 3A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 9 & 18 & -3 \end{pmatrix}$$

Somme de deux matrices Soients $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme des matrices A et B est la matrice $A + B$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 3 \\ -2 & 9 & -1 \end{pmatrix} ; A - B = A + (-1)B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $A, B, C \in M_{np}(\mathbb{K})$.On a :

1) $A + B = B + A$, i.e. l'addition est commutative.

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, i.e. l'addition est associative.

3) $A + O_{np} = O_{np} + A = A$, i.e. la matrice nulle est un élément neutre pour l'addition.

4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

5) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Théorème .1 *L'espace $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$ dont une base (dite canonique) est constituée par la famille de matrices élémentaires $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ définies par*

$$E_{ij} = i \rightarrow \overset{\textstyle j \downarrow}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ : & : & : & : \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ : & : \ldots & : & : \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $M_{3,2}(\mathbb{R})$. $\dim(M_{3,2}(\mathbb{R})) = 6$.

2 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient $\dim E = p$, $B_1 = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\dim F = n$, et $B_2 = (v_1, ..., v_n)$ une base de F et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
• Pour $j \in \{1, ..., p\}$, $f(e_j)$ est un vecteur de F et s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B_2 = (v_1, ..., v_n)$ de F. Il existe donc n scalaires uniques $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ tels que

$$f(e_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n$$

Définition 2 *La matrice associée à l'application linéaire f par rapport aux bases B_1 et B_2 est la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$.*

Autrement dit la matrice A est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ B_1, exprimée dans la base d'arrivée B_2. On note cette matrice $Mat_{B_1,B_2}(f)$ ou bien $Mat(f, B_1, B_2)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \end{array}$$

Remarque .1 *1) La taille de la matrice dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F.*
2) les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base B_1 de E et de la base B_2 de F.

Exemple 1 *soit*

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y - 2z, 3x - y) \end{aligned}$$

$B_c(\mathbb{R}^3) = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$
$B_c(\mathbb{R}^2) = (e_1' = (1, 0), e_2' = (0, 1))$
$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 3) = 1e_1' + 3e_2'$
$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = 1e_1' - 1e_2'$
$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-2, 0) = -2e_1' + 0e_2'$

$$M\left(f, B_c\left(\mathbb{R}^3\right), B_c\left(\mathbb{R}^2\right)\right) = A_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_1 = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \end{array} \end{array}$$

$B_1 = (v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1))$ *base de* $\mathbb{R}^3$.
$B_2 = (v_1' = (1, 1), v_2' = (1, 0))$ *base de* $\mathbb{R}^2$.
$f(v_1) = f(1, 1, 0) = (2, 2) = 2v_1' + 0v_2'$
$f(v_2) = f(1, 0, 1) = (-1, 3) = 3v_1' - 4v_2'$
$f(v_3) = f(0, 1, 1) = (-1, -1) = -1v_1' + 0v_2'$

$$M(f, B_1, B_2) = A_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_2 = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1' \\ v_2' \end{array} \end{array}$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

2.1 Multiplcation de Matrices

Soient $f : F \to G,\ g : E \to F,\ f \circ g : E \to G$

avec $\dim E = p$, $\dim F = m$, $\dim G = n$.

on note

$$A = Mat\,(f, B_F, B_G) \in M_{nm}(\mathbb{K})$$

et

$$B = Mat\,(g, B_E, B_F) \in M_{mp}(\mathbb{K}).$$

alors

$$A.B = Mat\,(f \circ g, B_E, B_G) \in M_{np}(\mathbb{K})$$

le produit $A.B$ de deux matrices A et B est définie si et seulement si le nombre de colones de A est égale le nombre de lignes de B.

Définition 3 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{nm}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{mp}(\mathbb{K})$.*
On définit le produit $C = A.B \in M_{np}(\mathbb{K})$ par $C = (c_{ik})$ avec

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{im}b_{mk} \quad , \forall i = \overline{1,n}\ , \forall k = \overline{1,p}$$

Exemple 2

$$(a_1, a_2, ..., a_p)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)\,.$$

Exemple 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-3)+(-1\times 2)+3\times(-1) = -11 & 12 \\ 2 & -6 \\ -10 & 19 \end{pmatrix}$$

Exemple 4

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

on ne peut pas le calculer car nombre de colonnes de la première matrice différent le nombre de lignes de la deuxième matrice $(2 \neq 3)$.

3 L'anneau des matrices carrées et propriétés

Propriétés: $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$

1) $(\lambda A).B = A.(\lambda B)$

2) $(A.B).C = A.(B.C)$,

(.) est associative vient de l'associativité de la composition d'application.

3) $A.(B+C) = (A.B) + (A.C)$ et $(B+C).A = (B.A) + (C.A)$.

4) La matrice identité I_n est l'élément unité.

$\forall A \in M_n(\Bbbk)$, $A.I_n = I_n.A = A$.

5) (.) n'est pas commutative en effet

contre exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème .2 *l'espace $(M_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre.*

L'anneau $M_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre en effet on prend l'exemple précédent $A \neq 0_{M_n(\Bbbk)}$, $B \neq 0_{M_n(\Bbbk)}$ et $A.B = 0_{M_n(\Bbbk)}$.

Remarque

L'application

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

avec $\dim E = n$ et $B = (a_1, a_2, ..., a_n)$ une base de E. on a

$$Mat(Id_E, B, B) = Mat(Id_E, B) = I_n$$

$$\begin{array}{cccc} Id_E(a_1) = a_1 & Id_E(a_2) & ... & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$Mat(Id_E, B) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ n_n \end{array}$$